خرداد ۸۲ MASTER

۱- مسأله مقدار مرزی زیر را از طریق تفاضلات محدود "finite difference" حل کنید.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0 \quad ; \quad y(0)=0 \quad ; \quad y(1)=1$$

مقدار Δx را برابر با $.25$ در نظر بگیرید.

۲- با استفاده از رابطه درون‌یابی نیوتن، فرمول زیر موسوم به Milne's Method را بدست آورید.

$$y_{n+1}=y_{n-3}+\frac{4}{3}h\left[2y'_{n-2}-y'_{n-1}+2y'_n\right]$$

که در آن $y'_i=\frac{dy}{dx}\Big|_i=f(x_i,y_i)$

۳- مسأله مقدار آغازی زیر را با استفاده از روش شماره 2 در ناحیه $x\in[0,\ 0.4]$ حل کنید.

$$y'=\frac{1}{1+x^2}-2y^2 \quad , \quad y(0)=0 \quad , \quad h=0.1$$

سه مقدار اولیه y را از روش ساده‌تری مثل اویلر بدست آورده و آنگاه روش milne را برای یک مرحله بکار ببرید.

۴- معادله تفاضلی زیر را حل کنید.

$$y_{n+2}-4y_{n+1}+3y_n=2^n$$

$$y_0=0 \quad , \quad y_1=1$$

۵- در رابطه زیر برای محاسبه ضریب α، چه راه ساده‌ای را پیشنهاد می‌کنید؟ توجه کنید که حل دستگاه مورد نیاز نمی‌باشد.

$$\int_{-2}^{2}f(x)\,dx=\alpha f(-1)-\frac{4}{3}f(0)+\frac{8}{3}f(1)$$

۶- مقادیر تابع f در جدول زیر آمده است.

x	1	1.25	1.5	1.75	2
f	10	8	7	6	5

الف) با استفاده از رابطه سیمپسون و مقادیر تابع در نقاط $x=1,\ 1.5,\ 2$ مقدار تقریبی $\int_1^2 f(x)dx$ را بدست آورید.

ب) با استفاده از کل نقاط داده شده در جدول، انتگرال فوق را با روش سیمپسون حساب کنید.

ج) با استفاده از نتایج الف) و ب) تقریب بهتری از انتگرال بالا ارائه دهید.

Pr. # 1 $\quad \dfrac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{1/16} + y_n = 0 \Rightarrow y_{n+1} - 1.9375\, y_n + y_{n-1} = 0$

$0 \quad .25 \quad .5 \quad .75 \quad 1.$

$y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4$

$$\left.\begin{aligned}
n=1:&\quad y_2 - 1.9375\, y_1 + y_0 = 0 \;\rightarrow\; -1.9375\, y_1 + y_2 = 0\\
n=2:&\quad y_1 - 1.9375\, y_2 + y_3 = 0 \;\rightarrow\; y_1 - 1.9375\, y_2 + y_3 = 0\\
n=3:&\quad y_2 - 1.9375\, y_3 + y_4 = 0 \;\rightarrow\; y_2 - 1.9375\, y_3 = -1
\end{aligned}\right\}$$

Solving yields $\quad y_1 = 0.294274 \;;\; y_2 = 0.570156 \;;\; y_3 = 0.810403$

Pr. # 2 $\quad y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4}{3} h \left[2f_{n-2} - f_{n-1} + 2f_n \right]$

$\longmapsto x = x_n + \alpha h$

$y_n \quad y_{n+1}$

$x_{n-3} \quad x_{n-2} \quad x_{n-1} \quad x_n \quad x_{n+1}$

$$\int_{x_{n-3}}^{x_{n+1}} \left(\frac{dy}{dx}\right) dx = \int_{x_{n-3}}^{x_{n+1}} f(x,y)\, dx$$

$$y_{n+1} = y_{n-3} + h \int_{-3}^{1} \left(f_n + \alpha \nabla f_n + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!} \nabla^2 f_n \right) d\alpha$$

OR

$$y_{n+1} = y_{n-3} + h \left[b_0 f_n + b_1 \nabla f_n + b_2 \nabla^2 f_n \right]$$

from which

$$b_0 = \int_{-3}^{1} 1\, d\alpha = 4 \;;\quad b_1 = \int_{-3}^{1} \alpha\, d\alpha = -4 \;;\; b_2 = 8/3$$

[illegible]

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_{n-3} + h\left[4 - 4\nabla + \tfrac{8}{3}\nabla^2 \right] f_n\\
&= y_{n-3} + h\left[4f_n - 4(f_n - f_{n-1}) + \tfrac{8}{3}(f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}) \right]
\end{aligned}$$

[illegible] $\quad y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3}\left[2f_n - f_{n-1} + 2f_{n-2} \right]$

Pr #3

$x_{n-3} \quad x_{n-2} \quad x_{n-1} \quad x_n \quad x_{n+1}$

$0 \quad 0.1 \quad .2 \quad .3 \quad .4$

Euler's Method

$$x_{n-2} = 0.1 \rightarrow y_{n-2} = y_{n-3} + h f(x_{n-3}, y_{n-3})$$

$$= 0 + 0.1\left[\frac{1}{1+1} - 2(0)^2\right] = 0.1$$

$$y_{n-1} = 0.1 + 0.1\left[\frac{1}{1+(.1)^2} - 2(.1)^2\right] = 0.197$$

$$y_n = 0.197 + 0.1\left[\frac{1}{1+(.2)^2} - 2(0.197)^2\right] = 0.2854$$

Milne's Method

$$f_{n-2} = \frac{1}{1+(0.1)^2} - 2(0.1)^2 = 0.97$$

$$f_{n-1} = \frac{1}{1+(.2)^2} - 2(0.197)^2 = 0.884$$

$$f_n = \frac{1}{1+(.3)^2} - 2(0.2854)^2 = .7545$$

$$y_4 = 0 + \frac{.4}{3}\left[2(0.7545) - 0.884 + 2(0.97)\right] = \underline{\underline{0.342}} \text{ Ans}$$

Pr. #4 $\quad y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = 2^n$

$y_0 = 0, \quad y_1 = 1$

[illegible] $\quad r^2 - 4r + 3 = 0 \rightarrow r = 3, 1 \rightarrow y_H = C_1(3)^n + C_2$

$$y_p = A(2)^n$$

$$A(2)^n 4 - 4(2)A(2)^n + 3(A)2^n = 2^n \Rightarrow A = -1$$

[illegible]

$$y_n = C_1(3)^n + C_2 - 2^n$$

$y_0 = 0 \rightarrow C_1 + C_2 = \cancel{0}$

$y_1 = 1 \rightarrow 3C_1 + C_2 = 3$

$\rightarrow C_1 = 1, \quad C_2 = 0$

$$y_n = 3^n - 2^n$$

Pr. #6

a) $\int_1^2 f(x)\,dx = \frac{0.5}{3}\left[10 + 4.7 + 5\right] = \frac{43}{6} = 7.1667$

b) $\int_1^2 f(x)\,dx = \frac{0.25}{3}\left[10 + 4.8 + 2.7 + 4.6 + 5\right] = \frac{85}{12} = 7.0833$

c) $I \approx 7.1667 + ch^4$

$I \approx 7.0833 + c\left(\frac{h}{2}\right)^4$

Thus, $15I \approx 16(7.0833) - (7.1667)$ or $I = 7.0777$

Pr. #5

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \alpha f(-1) - \frac{4}{3} f(0) + \frac{8}{3} f(1)$$

$$l_1(x) = \frac{x(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{1}{2}(x^2 - x)$$

تابع $l_1(x)$ در نقاط $x=0$ و $x=1$ مقدار آن صفر است، و در نقطه $x=-1$ مقدار آن 1 است. بنابراین

$$\alpha = \int_{-2}^{2} l_1(x)\,dx = \int_{-2}^{2} \frac{1}{2}(x^2 - x)\,dx = 8/3$$

بنابراین

$$\boxed{\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{8}{3} f(-1) - \frac{4}{3} f(0) + \frac{8}{3} f(1)}$$