نام و نام خانوادگی MASTER

شماره دانشجویی - - - - - - - -

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 10 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 6 \\ -2x_2 + 4x_3 = 8 \end{cases}$$

دستگاه معادلات خطی روبرو را در نظر بگیرید.

(i) با انتخاب $x^{(0)} = (0,0,0)^t$ دو تکرار از روش تکراری گوس سیدل را انجام دهید.

(ii) ماتریس M و بردار c را در رابطه $x^{(i+1)} = Mx^{(i)} + c$ با قسمت (i) پیدا کنید.

Solution

$X_1 = -.6X_2 + 2 = 2$

2 $X_2 = -.5X_1 + \frac{1}{3}X_3 + 1 = -1 + 0 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad X^{(1)} = (2,0,2)^t$

$X_3 = .5X_2 + 2 = 2$

تکرار دوم

$X_1 = 2$

2 $X_2 = -1 + \frac{2}{3} + 1 = 2/3 \quad \Rightarrow \quad X^{(2)} = (2, 2/3, 7/3)^t$

$X_3 = \frac{1}{3} + 2 = 7/3$

(ii)

$$(L+D)X^{i+1} = -UX^{i} + b \qquad (*)$$

$$L+D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow (L+D)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -1/10 & 1/6 & 0 \\ -1/20 & 1/12 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Multiply Eq. $*$, by $(L+D)^{-1}$ gives :

$$X^{i+1} = \begin{pmatrix} 0 & -3/5 & 0 \\ 0 & 3/10 & 1/3 \\ 0 & 3/20 & 1/6 \end{pmatrix} X^{i} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

بنابراین $\boxed{c = (2\ 0\ 2)^t \quad \text{و} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & -3/5 & 0 \\ 0 & 3/10 & 1/3 \\ 0 & 3/20 & 1/6 \end{pmatrix}}$

1 2

2 - معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dt} = y^2$ با مقدار آغازی $y(0)=1$ داده شده است.

(i) با استفاده از سری تیلور مرتبه دو $y(0.1)$ را حساب کنید. $h=0.1$

(ii) با روش Predictor - Corrector ، $y(0.2)$ را نیز حساب کنید، دقیقاً توضیح دهید که قسمت این را چگونه به کار گرفته اید.

<u>Solution</u>

$$y(t+h) = y(t) + h\,y'(t) + \frac{h^2}{2!}\,y''(t)$$

at $t=0 \rightarrow y(0.1) = y(0) + h\,y'(0) + \frac{h^2}{2!}\,y''(0)$

از

$y(0)=1$; $y'(0) = (1)^2 = 1$ and $y'' = 2yy'$

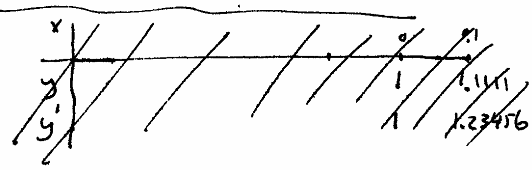
$y''(0) = 2$

یعنی

$$y(0.1) = 1 + 0.1(1) + \frac{0.1^2}{2}(2) = \underline{\underline{1.11}}$$

$y(t) = \dfrac{1}{1-t}$

exact Solution



	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$
n-3	-0.2	0.833	0.6944
n-2	-0.1	0.909	0.82644
n-1	0	1	1
n	0.1	1.1111	1.23456
n+1	0.2	?	

$$y_{n+1,p} = y_{n-3} + \frac{4h}{3}\left(2f_n - f_{n-1} + 2f_{n-2}\right)$$

$$y_{n+1,c} = y_{n-1} + \frac{h}{3}\left(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1}\right)$$

ب٪ع

$$y^{p}(0.2) = 0.833 + \frac{0.4}{3}\left[2(1.23456) - 1 + 2(0.82644)\right] = \cancel{1.61616}\ 1.2496$$

$$y^{c}(0.2) = 1 + \frac{0.1}{3}\left[1.5615 + 4(1.23456) + 1\right] = 1.24999$$

$$\boxed{\underset{\text{exact}}{y(0.2)} = 1.25}$$

3- معادله $f(x)=x^3-x^2-x+1$ را در نظر بگیرید. یکی از ریشه‌های این معادله عدد 1
می‌باشد. با استفاده از روش نیوتن و انتخاب نقطه آغازی $X_0=1.1$ این ریشه را بیابید.
همینطور برای همگرائی سریعتر چه راه حلی پیشنهاد می‌کنید و چرا؟

$$x^{i+1} = x^{i} - \frac{f(x^{i})}{f'(x^{i})}$$

$$X_{i+1} = X_i - \frac{x^3-x^2-x+1}{3x^2-2x-1}$$

$$X_1 = 1.1 - \frac{0.021}{0.43} = 1.0512$$

$$X_2 = 1.0512 - \frac{0.005377}{0.21266} = 1.0259$$

which means Convengence is slow.

در اینجا توجه کنید $f(1)=0$ و همینطور $f'(1)=0$. پس برای همگرائی سریعتر میتوانیم فرمول زیر را استفاده کنید.

$$X_{j+1} = X_j - \frac{2f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$= 1.1 - \frac{0.041}{0.43} = 1.00465$$

که جواب خیلی زودتر همگرا خواهد شد.

4- مقدار u_3 حذف شده از جدول زیر را بیابید.

k	0	1	2	3	4
u_k	3	8	15	?	47

Solution

$$\Delta^4 u_0 = 0 \rightarrow (E-1)^4 u_0 = (E^4 - 4E^3 + 6E^2 - 4E + 1)u_0 = 0$$

which becomes

$$u_4 - 4u_3 + 6u_2 - 4u_1 + u_0 = 0$$

using the values from the table we then have

$$47 - 4u_3 + 6(15) - 4(8) + 3 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{u_3 = 27}}$$

5 - نحوه بدست آوردن فرمول زیر را توضیح دهید.

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}\left(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1}\right)$$

x_{n-1}, $\alpha=-2$ $\quad$ x_n, $\alpha=-1$ $\quad$ x_{n+1}, $\alpha=0$

$x = x_{n+1} + \alpha h$

$dx = h\,d\alpha$

Solution

$$\int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} y'(x)\,dx = h\int_{-2}^{0}\left(f_{n+1} + \alpha\nabla f_{n+1} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}\nabla^2 f_{n+1}\right)d\alpha$$

$$y_{n+1} = y_{n-1} + h\left[2f_{n+1} - 2\nabla f_{n+1} + \frac{1}{3}\nabla^2 f_{n+1}\right]$$

$$y_{n+1} = y_{n-1} + h\left[2f_{n+1} - 2(f_{n+1} - f_n) + \frac{1}{3}(f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1})\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}\left(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1}\right)}$$

6 - مقدار تابع f در جدول زیر آمده است.

x	1	1.25	1.5	1.75	2
f	10	8	7	6	5

(i) با استفاده از رابطه سیمپسون و مقادیر تابع در نقاط $x=1, 1.5, 2$ مقدار تقریبی $\int_1^2 f(x)dx$ را حساب کنید.

(ii) با استفاده از تمام نقاط داده شده در جدول، انتگرال فوق را با روش سیمپسون حساب کنید.

(iii) با استفاده از نتایج (i) و (ii) تقریب بهتری از انتگرال بالا ارائه دهید.

(i) $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx = \frac{0.5}{3}\left[10 + 4(7) + 5\right] = \frac{43}{6} = 7.1667$

(ii) $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx = \frac{0.25}{3}\left[10 + 4(8) + 2(7) + 4(6) + 5\right] = \frac{85}{12} = 7.0833$

(iii) $I = 7.1667 + ch^4$

$I = 7.0833 + c\left(\frac{h}{2}\right)^4$

Thus,

$$15I = 16(7.0833) - (7.1667)$$

or $\boxed{I = 7.0777}$

7- با استفاده از جدول زیر مقدار k مثبت را پیدا کنید بگونه ای که :

$$y_{k+3} = 3(y_{k+2} - y_k) + 18$$

k	4	8	12	16	20
y_k	6	42	110	210	342

Using Newton's D. Difference formula gives :

k	y	[,]	[, ,]	[, , ,]	[, , , ,]
4	6				
		9			
8	42		1		
		17		0	
12	110		1		0
		25		0	
16	210		1		
		33			
20	342				

بنابراین

$$\Rightarrow y_k = 6 + 9(k-4) + 1(k-4)(k-8)$$

$$y_k = k^2 - 3k + 2$$

معادله درجه 2 از k

اکنون با استفاده از رابطه داده شده داریم .

$$y_{k+3} = 3(y_{k+2} - y_k) + 18$$

$$\cancel{(k+3)^2 = 3[(k+2)^2 - 3(}$$

$$(k+3)^2 - 3(k+3) + 2 = 3[(k+2)^2 - 3(k+2) + 2 - k^2 + 3k - 2] + 18$$

Simplifing gives :

$$k^2 - 9k - 10 = 0 \Rightarrow k = \frac{9 \pm \sqrt{121}}{2} = 10$$