تئوری فازی و کاربرد آن

دکتر مهدی غضنفری

با همکاری:
مهندس فرناز حیدرپور

پاییز ۱۴۰۲

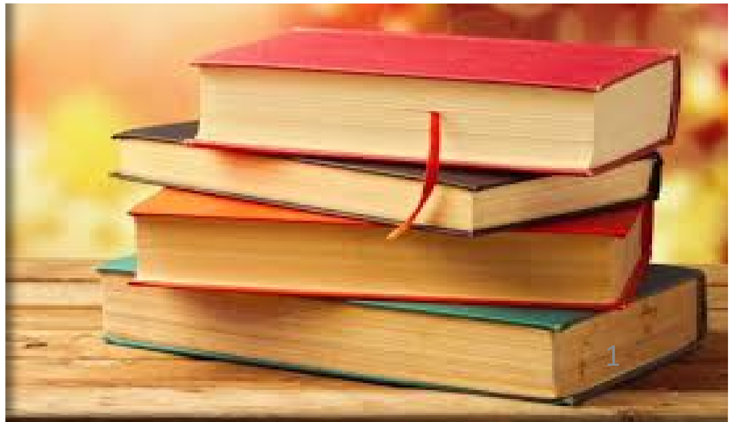
منابع

- مقدمه‌ای بر نظریه مجموعه‌های فازی؛ مهدی غضنفری، محمود رضایی

- Fuzzy Set Theory-and Its Applications, Zimmermann

- Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, Klir and Yuan

- Fuzzy Logic with Engineering Applications, Timothy J. Ross



فصل اول

مفاهیم و کاربردها

- نظریه مجموعه های فازی، نخستین بار بطور رسمی توسط پروفسور لطفعلی عسگر زاده در سال ۱۹۶۵ مطرح گردید، و ایده آن با این عبارت توسط ایشان مطرح گردید:

"ما نیاز به یک نوع مختلف از ریاضیات هستیم تا بتوانیم ابهامات و عدم دقت رویدادها را مدلسازی نماییم مدلی که متفاوت از نظریه احتمالات است."

- نظریه فازی، اصول و مبانی علمی را بیان می کند که حد فاصل دانایی و نادانی (ناحیه خاکستری) را فرموله سازی می کند.

➢ مفهموم فازی چیست و چه تفاوتی با احتمال دارد؟

فصل اول
مفاهیم و کاربردها

تابع توزیع امکان:
امکانِ اینکه به یک شخص ۱۸۵ سانتی متر قد بلند بگویند ۰.۷ است.

مثال ۱:

فرض کنید ۳ مرد و ۲ زن پشت درکلاس هستند. یک نفر وارد کلاس می شود.

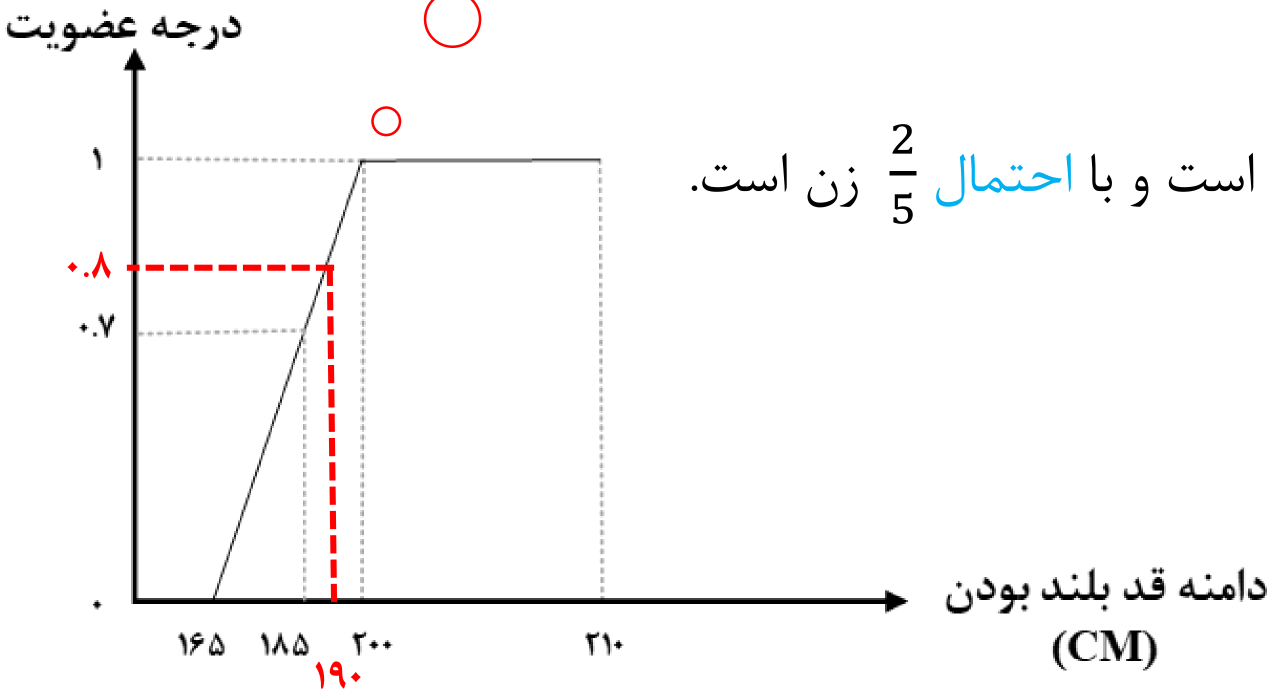
احتمال اینکه زن یا مرد باشد چقدر است؟

با احتمال $\frac{3}{5}$ مرد است و با احتمال $\frac{2}{5}$ زن است.

اما فردی که وارد کلاس شده است؛ قد بلند است؟!

چه ابهامی در این عبارت وجود دارد؟

بحث فازی؟



فصل اول
مفاهیم و کاربردها

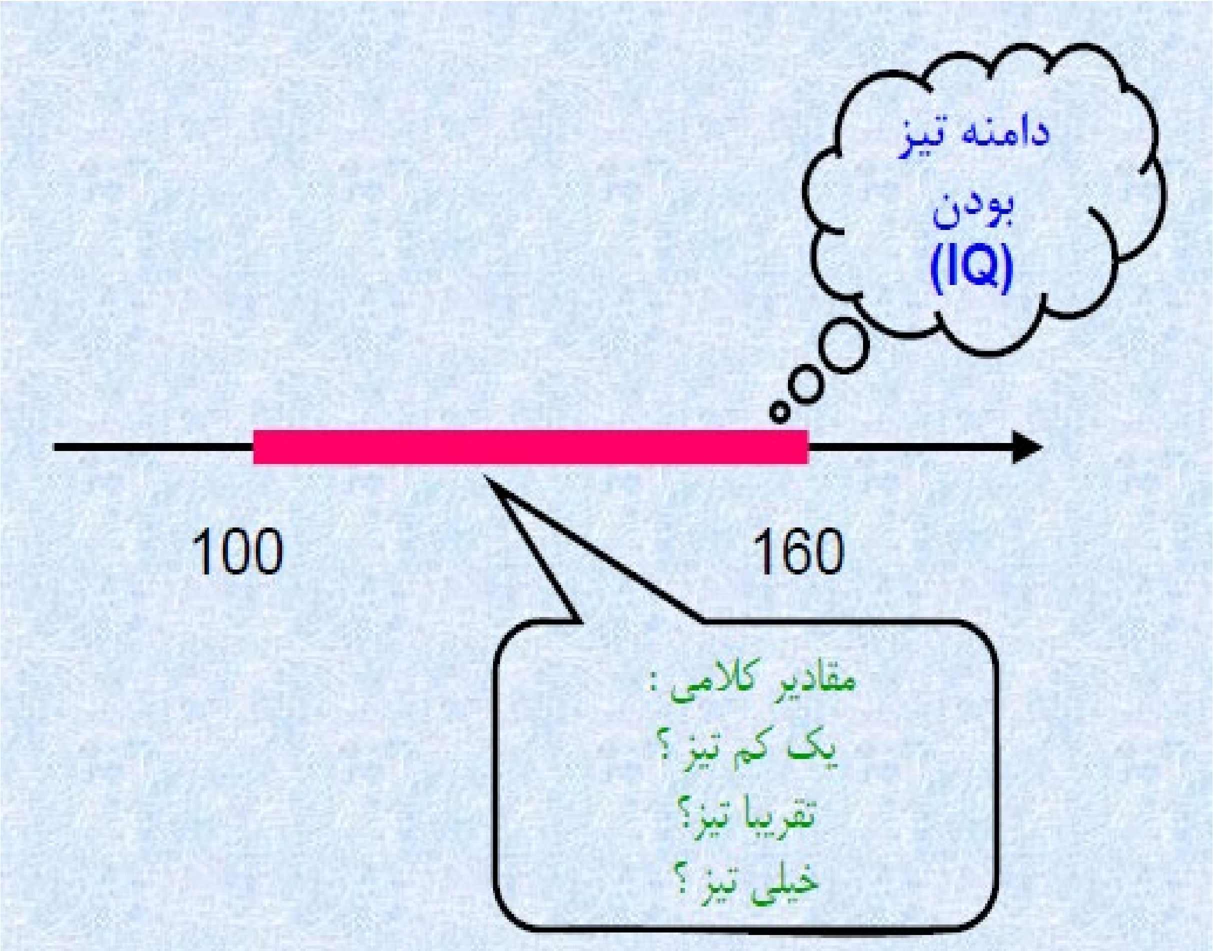
مثال ۲:

عبارت "علی آدم تیزی است"

در این عبارت چه ابهامی وجود دارد؟

بحث فازی؟

تیز بودن (ضریب هوش (IQ))؟



ماهیت عدم قطعیت

- ماهیت عدم قطعیت (عدم اطمینان) با توجه به مساله مورد بررسی می بایست توسط تحلیلگر مشخص شود.

- زیرا عدم اطمینان می تواند ناشی از "شانس (تصادفی بودن)"، "ابهام"،" کمبود دانش آگاهی" و یا " از عدم دقت" و ... باشد.

فصل اول
مفاهیم و کاربردها
نظریه احتمال و فازی

نظریه احتمال برای پیش بینی نتیجه یک رویداد در آینده به کار می رود. رویدادی که در آینده قرار است اتفاق بیافتد و نتیجه آن در حال حاضر مشخص نیست. در واقع، نظریه احتمال به رویدادهای تصادفی مرتبط می باشد.

مثال ۳:

پرتاب یک سکه سالم (شیر- خط).

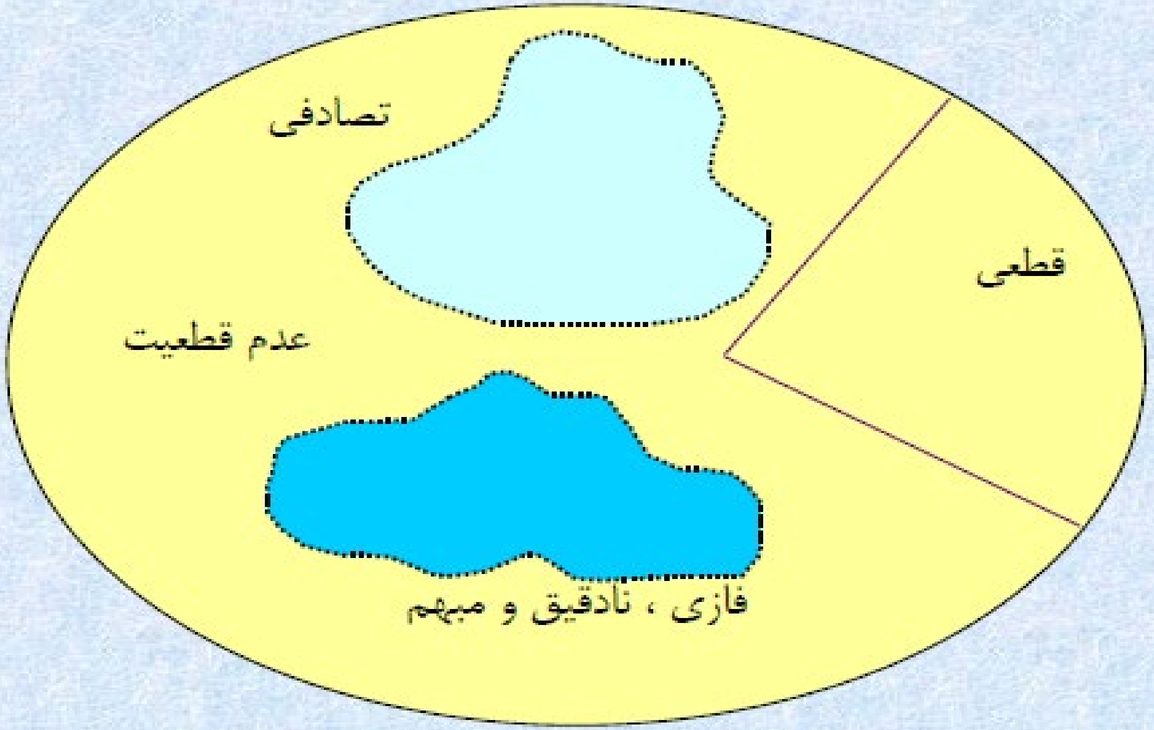
در مورد شیر یا خط ابهام نداریم؛ در واقع، فضای پیشامد دقیق است. فقط نمی دانیم کدام یک از آنها رخ خواهد داد.

"وقتی اتفاق بیافتد دقیق است."

فازی به "بی دقتی" و مفاهیم نادقیق که در زبان طبیعی بکار می روند مرتبط است. درواقع، بشر همواره کلمات و عباراتی را به کار می برد که مرزهای روشنی با هم ندارند.

برخلاف ابهامات از نوع احتمال که مرز میان وقایع آن به وضوح مشخص است در ابهام نوع فازی مرزها در هم آمیخته است.

نظریه احتمال و فازی



پایان فصل اول

تمرین هفتگی

تمرین ۱.

بجز نظریه فازی و احتمال، چه نظریه های دیگری می شناسید که با عدم اطمینان سر و کار داشته باشند؟

تمرین ۲.

تیم A در مسابقه با تیم B برنده می شود (A>B) و تیم B نیز تیم C را مغلوب می کند (B>C). از نتیجه بازی تیمهای A و C چه انتظاری دارید؟ (آیا حتما تیم A برنده می شود؟) چرا؟

فصل دوم

مجموعه های فازی

در نظریه کلاسیک، یک مجموعه شامل یکسری از عناصر مشخص و معین (اعداد، نمادها، اشیا و غیره) است که در یک صفت یا ویژگی خوش تعریف (Well-defined) اشتراک دارند.

مثال ۱:

مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از ۵: $A = \{1,2,3,4\}$

صفت اعداد طبیعی کوچکتر از ۵، یک ویژگی خوش تعریف می باشد، چرا که صفت تعریف شده کاملا واضح، مشخص و دارای مرزهای شفاف است. اما بعنوان مثال، صفت اعداد کوچک یک ویژگی ناخوش تعریف با مرزهای غیرشفاف می باشد. تشخیص اینکه یک عدد عضو مجموعه اعداد کوچک هست یا خیر، به فرد نظردهنده بستگی دارد.

نمایش مجموعه های کلاسیک:

$$\boxed{\begin{gathered} A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \\ A = \{x \in X | properties\ of\ x\} \end{gathered}}$$

تابع مشخصه یا نشانگر A: (Characteristic Function)

$$X_A(x) = \begin{cases} 1\ ;\ if\ and\ only\ if\ x \in A \\ 0\ ;\ if\ and\ only\ if\ x \notin A \end{cases}$$

یعنی یک عنصر یا متعلق به یک مجموعه است و یا متعلق به آن مجموعه نیست.

$$\boxed{X_A(x) : X \to \{0,1\}}$$

فصل دوم

مجموعه های فازی

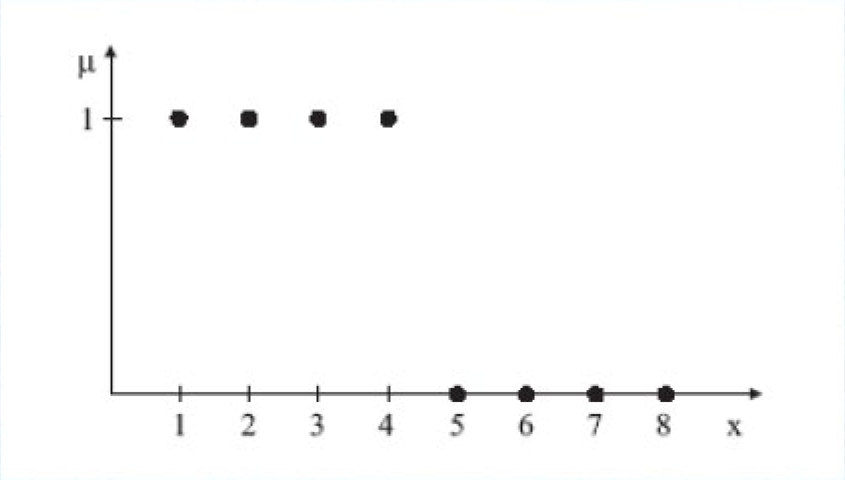
نمایش مجموعه های کلاسیک

مثال ۲:

مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از ۵:

$A = \{۱، ۲، ۳، ۴\}$

$$A = \{x \mid x \in N, x < 5\}$$

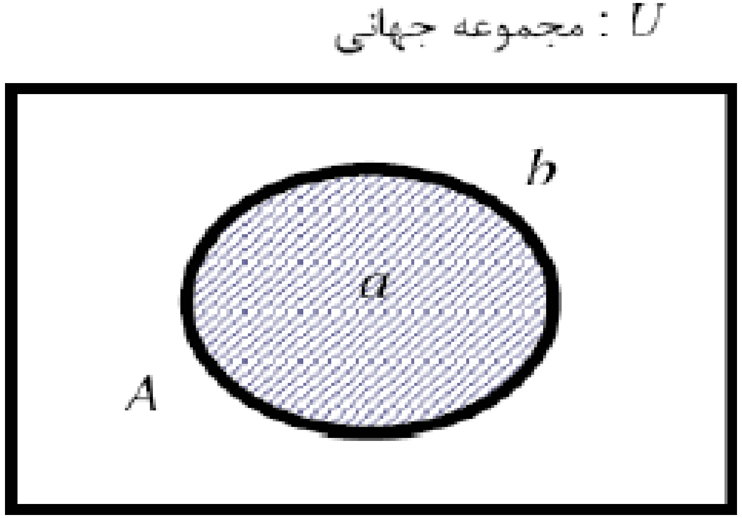


همانطور که ملاحظه می شود در مجموعه های کلاسیک، یک عنصر یا عضو مجموعه مورد نظر هست و یا نیست، یعنی از این دو حالت خارج نیست اگر عنصر مورد نظر عضو مجموعه باشد ۱۰۰ ٪ عضو آن است و اگر عضو آن نباشد ۱۰۰ ٪ عضو آن نیست.

مجموعه های کلاسیک برای مفاهیمی که به طور قطعی و مشخص قابل تعریف هستند مناسب می باشد. در حالیکه مفاهیمی وجود دارند که نمی توان بطور مشخص و قطعی برای آنها حد و مرزی مشخص کرد و بر اساس آن مجموعه کلاسیک را تشکیل داد.

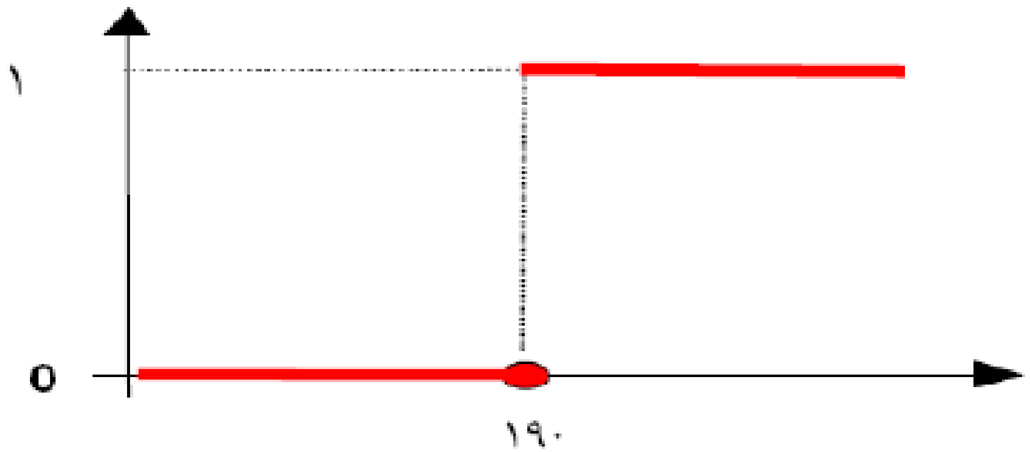
مثال ۳:

فرض کنید U مجموعه مرجع دانشجویان باشد و A مجموعه دانشجویان دانشگاه علم و صنعت تعریف شود. در این مورد چون به طور قطعی و مشخص می توان گفت که هر دانشجو متعلق به چه دانشگاهی است، مجموعه کلاسیک مناسب است و نمایش شماتیک آن به صورت زیر است:



مثال ۴:

حال فرض کنید مجموعه افراد قدبلند دانشجویان دانشگاه علم و صنعت (A)، مجموعه افرادی باشد که قد آنها بزرگتر یا مساوی ۱۹۰ سانتی متر است. آنگاه افرادی که قد آنها دقیقا بزرگتر یا مساوی ۱۹۰ سانتی متر است با درجه مشخصه "۱" وارد مجموعه جدید می شوند و افرادی که قد آنها کوچکتر از ۱۹۰ سانتی متر است عضو مجموعه نبوده و درجه مشخصه آنها "۰" خواهد بود.



همانطور که ملاحظه کردید در نظریه مجموعه کلاسیک، عضویت مفهومی محض برای یک مجموعه است. یعنی یک عنصر یا متعلق به مجموعه است و یا متعلق به آن مجموعه نیست.

$$\boxed{X_A(x): X \to \{0,1\}}$$

با این وجود عضویت در مجموعه های فازی می تواند مفهوم منعطف تری داشته باشد.

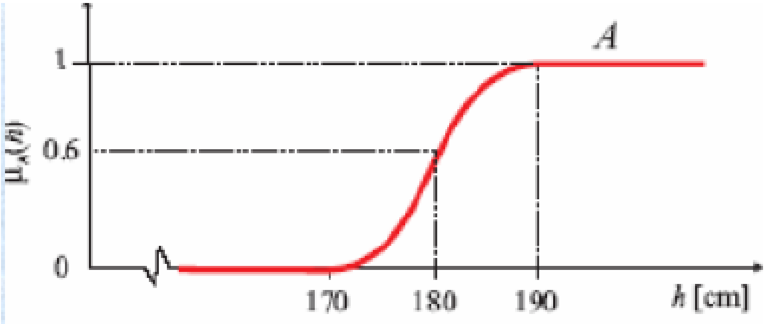
$$\boxed{\mu_{\tilde{A}}(x): X \to [0,1]}$$

h به طور کامل عضو A است :

h تاحدودی عضو A است :

h عضو مجموعه A نیست :

$$\mu_A(h) = \begin{cases} 1 & h \geq 190 \\ (0,1) & 170 < h < 190 \\ 0 & h \leq 170 \end{cases}$$



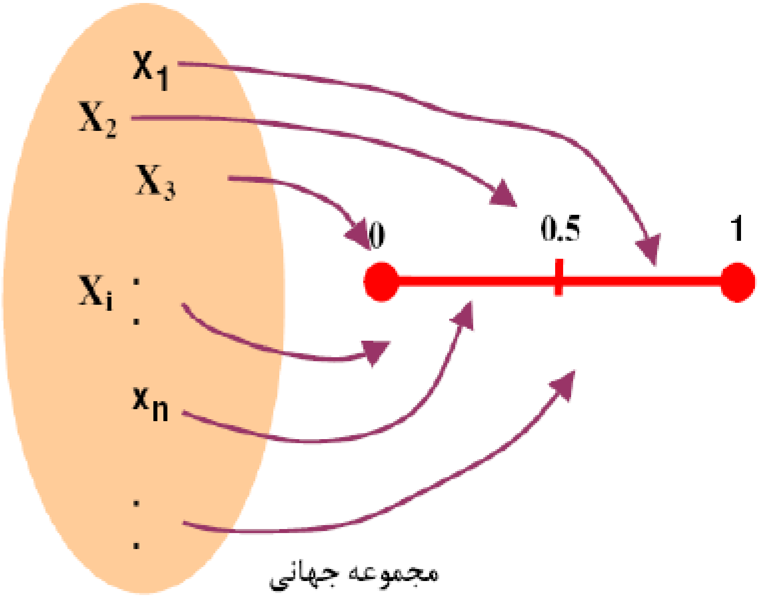
تابع عضویت مجموعه فازی افراد قد بلند

مجموعه فازی : اگر X مجموعه ای از عناصر باشد که با x نشان داده می شود؛

آن گاه مجموعه فازی $\tilde{A}$ در X، مجموعه زوج های مرتب به شرح ذیل است :

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}$$

$\mu_{\tilde{A}}(x)$ تابع عضویت یا درجه عضویت x در $\tilde{A}$ است. تابع عضویت، مجموعه X را به فضای **[0,1]** تصویر می کند.



نمایش شماتیک تصویر اعضاء مجموعه فازی به درجه های عضویت در بازه صفر و یک

$$\tilde{A} = \{(1,1),(2,1),(3,0.75),(4,0.5),(5,0.3),(6,0.3),(7,0.1),(8,0.1)\}$$

چهارمین عنصر از سمت چپ به ما می‌گوید که عدد ۴ با درجه عضویت ۰/۵ به مجموعه $\tilde{A}$ متعلق است.

مجموعه های فازی گسسته و پیوسته :

اگر مجموعه عناصر یک مجموعه فازی، گسسته باشد به آن مجموعه فازی گسسته گفته می شود که درجه عضویت هر یک از عناصر آن، با یک عدد بین صفر و یک بیان می شود. نحوه نمایش مجموعه فازی گسسته می تواند به صورت مجموعه زوج های مرتب در مثال قبل و یا به صورت ذیل باشد:

$$\tilde{A} = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_2)}{x_2} + \dots$$

که در حالت کلی به صورت ذیل نشان داده می شود:

$$\boxed{\tilde{A} = \sum_{x_i \in X} \mu_{\tilde{A}}(x_i) / x_i}$$

در اینجا نماد $\sum$، به معنی جمع نیست بلکه به معنی گسسته بودن مجموعه فازی است.

مجموعه فازی پیوسته

اگر مجموعه عناصر یک مجموعه فازی، پیوسته باشد به آن مجموعه فازی پیوسته گویند و معمولا تابع عضویت آن به صورت یک تابع بیان می شود. مجموعه های فازی پیوسته علاوه بر مجموعه زوج های مرتب، به صورت ذیل نیز می تواند نشان داده شود:

$$\boxed{\tilde{A} = \int_{x} \mu_{\tilde{A}}(x) / x}$$

در اینجا نماد $\int$ ، به معنی انتگرال نیست بلکه به معنی پیوسته بودن مجموعه فازی است.

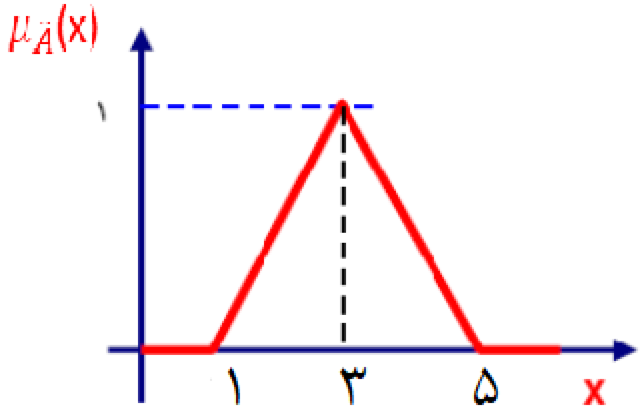
مجموعه فازی گسسته و پیوسته

مثال ← مجموعه اعداد صحیح مثبت نزدیک به ۵ می تواند توسط یک مجموعه فازی گسسته به صورت ذیل تعریف شود :

$$\tilde{A} = \frac{0.2}{2} + \frac{0.6}{3} + \frac{0.8}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0.8}{6} + \frac{0.4}{7}$$

و مجموعه اعداد حقیقی غیرمنفی نزدیک به ۳ نیز توسط یک مجموعه فازی پیوسته با تابع عضویت ذیل قابل تعریف است.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1 \\ \dfrac{x-1}{2} & 1 < x \le 3 \\ \dfrac{5-x}{2} & 3 < x \le 5 \\ 0 & x > 5 \end{cases}$$



سوال:

آیا درجه عضویتها می تواند قطعی نباشد؟

<u>***مجموعه فازی نوع دوم:***</u> اگر درجه عضویت یک مجموعه فازی، خود فازی نوع اول باشد، آن را مجموعه فازی نوع دوم می‌نامیم؛ یعنی:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) \in [0,1]\}$$

جائیکه

$$\boxed{\mu_{\tilde{A}}(x) = \{(u_i, \mu_{u_i}(x)) \mid x \in X, u_i, \mu_{u_i}(x) \in [0,1]\}}$$

$$\tilde{A} = \{(3,0.3), (4,0.5), (5,0.6)\}$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{A} = \{(3,0.\tilde{3}), (4,0.\tilde{5}), (5,0.\tilde{6})\}$$

$$0.\tilde{3} = \{(0.2,0.5), (0.3,1), (0.4,0.2)\}$$

مجموعه فازی نوع mام: اگر درجه عضویت یک مجموعه فازی، خود فازی نوع $m-1$ روی $[0,1]$ برای $m>1$ باشد، آن مجموعه فازی نوع mام است.

<u>مجموعه فازی فراگیر:</u> مجموعه فازی فراگیر با سه‌تایی مرتب بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}$$

جائیکه $\mu_{\tilde{A}}(x)$ درجه عضویت x در $\tilde{A}$ و $\nu_{\tilde{A}}(x)$ درجه عدم عضویت x در $\tilde{A}$ را نشان می‌دهد، با این شرط که:

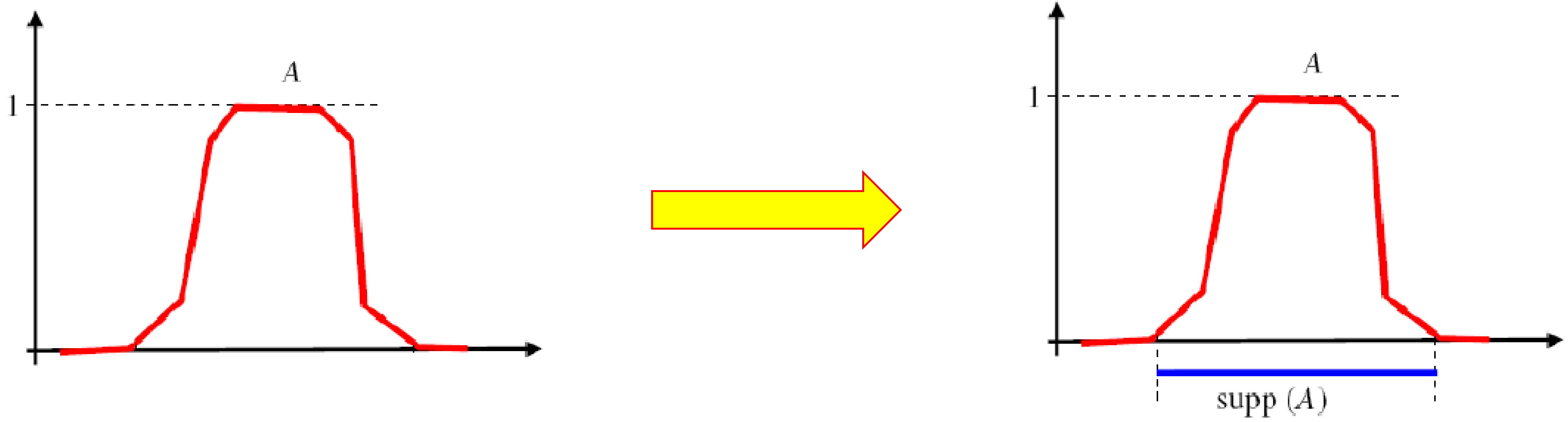
$$0 \le \mu_{\tilde{A}}(x) + \nu_{\tilde{A}}(x) \le 1$$

مجموعه فازی معمولی، حالت خاصی از این مجموعه فازی است بطوریکه $\nu_{\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$ است.

$$\tilde{A} = \{(3,0.3,0.7), (4,0.4,0.6), (5,0.7,0.3)\}$$

مجموعه پشتیبان (تکیه‌گاه): مجموعه پشتیبان مجموعه فازی $\tilde{A}$ که با $S(\tilde{A})$ نشان داده می‌شود عبارت است از مجموعه عناصری از $\tilde{A}$ که درجه عضویت آنها بزرگتر از صفر است؛ یعنی:

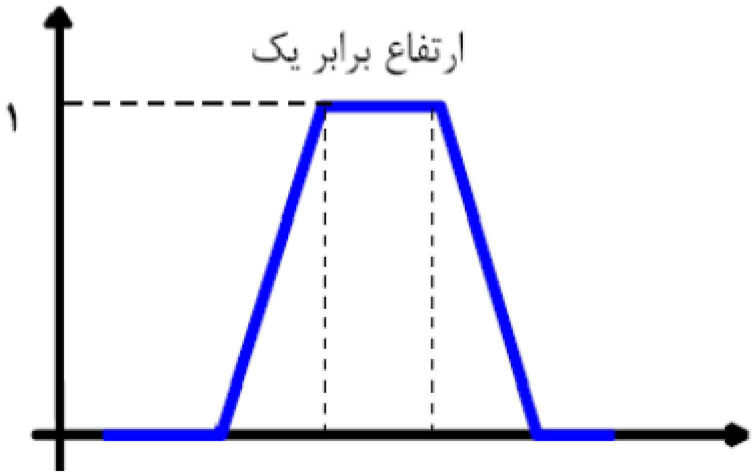
$$S(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$$



فصل دوم
مجموعه های فازی

ارتفاع یک مجموعه فازی: ارتفاع یک مجموعه فازی، بزرگترین مقدار درجه عضویت در آن مجموعه است؛ یعنی:

$$hgt(\tilde{A}) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x)\}$$



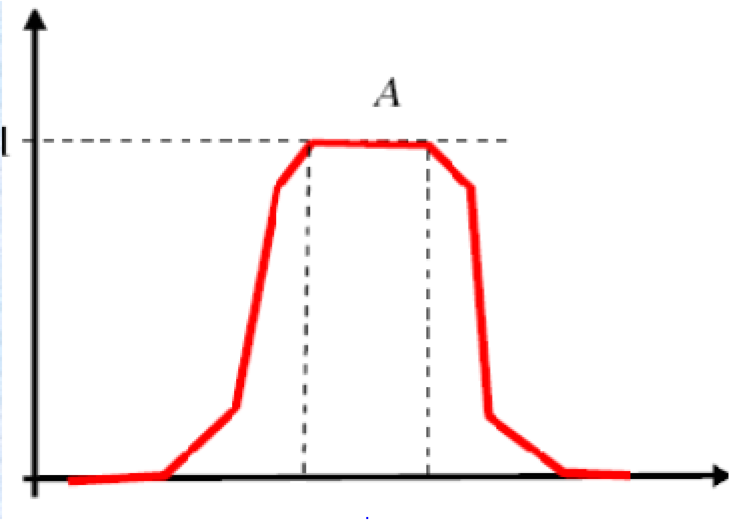
مجموعه فازی نرمال: یک مجموعه فازی را نرمال می‌نامند اگر درجه عضویت حداقل یکی از اعضاء آن مثلاً x_i برابر ۱ باشد یعنی $\exists x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ باشد. به بیان دیگر:

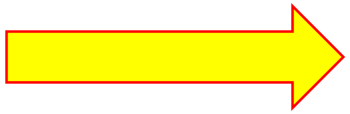
اگر $hgt(\tilde{A}) = 1$ باشد مجموعه فازی $\tilde{A}$ را مجموعه فازی نرمال نامند،

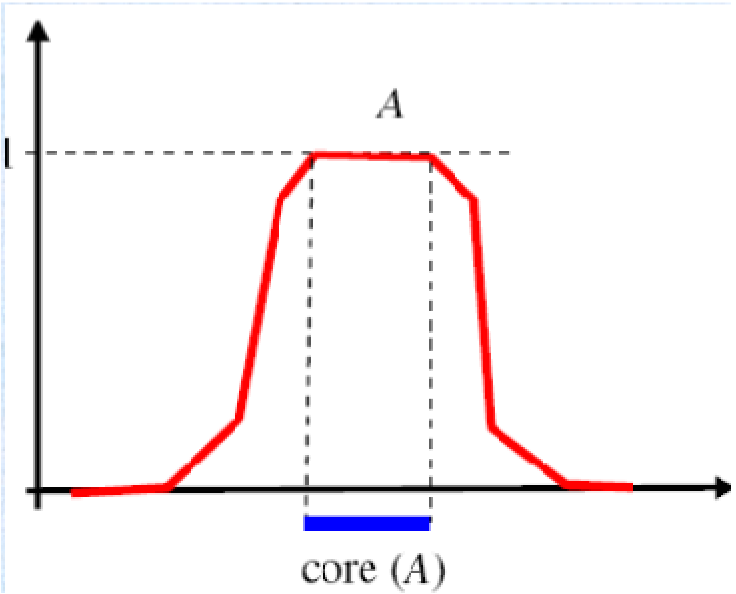
و اگر $hgt(\tilde{A}) < 1$ باشد مجموعه فازی $\tilde{A}$ را مجموعه فازی غیرنرمال نامند.

<u>هسته یک مجموعه فازی:</u> هسته مجموعه فازی $\tilde{A}$ که با نماد $core(\tilde{A})$ نشان داده می‌شود عبارت است از زیرمجموعه‌ای از مجموعه مرجع X که درجه عضویت عناصر آن در $\tilde{A}$ برابر ۱ است یعنی:

$$core(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$$







فصل دوم
مجموعه های فازی

مثال:

$X = \{1,2,...,10\}$

$\tilde{A} = \{(1,0.2),(2,0.5),(3,0.8),(4,1),(5,0.7),(6,0.3)\}$

الف) مجموعه پشتیبان؟ $S(\tilde{A}) = \{1,2,3,4,5,6\}$

ب) نرمالِ؟ مجموعه فازی $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی نرمال است زیرا $hyt(\tilde{A}) = 1$ است.

ج)هسته؟ $core(\tilde{A}) = \{4\}$

مجموعه در سطح α (برش α): مجموعه در سطح α مجموعه‌ای است از تمام اعدادی که د، جه عضویت آنها در مجموعه فازی بزرگتر یا مساوی α باشد؛ یعنی:

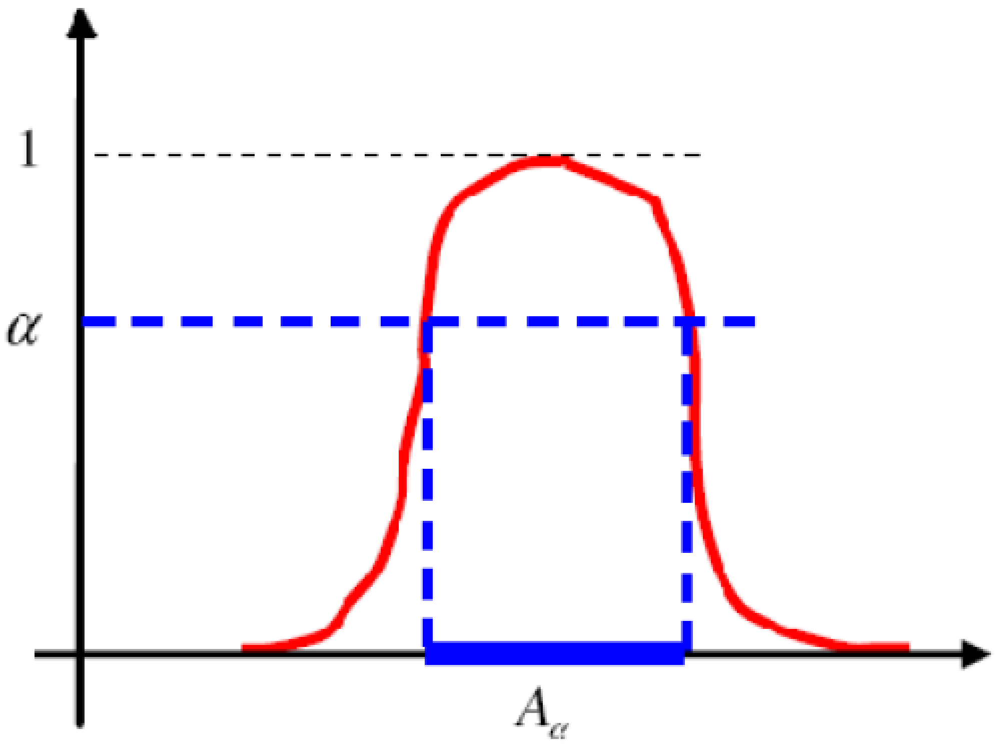
$$A^{\geq\alpha} = A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

ضمناً مجموعه

$$A^{>\alpha} = A'_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}$$

را مجموعه قوی در سطح α (برش قوی α) می‌نامند.

مجموعه های به دست آمده از برش α و برش قوی α مجموعه های کلاسیک هستند.



برش α در یک مجموعه فازی

مثال:

$$X = \{1,2,...,10\}$$

$$\tilde{A} = \{(1,0.2),(2,0.5),(3,0.8),(4,1),(5,0.7),(6,0.3)\}$$

الف) مجموعه برش آلفا در سطح ۰.۳ و ۰.۶ و ۱

$$A_{0.3} = \{2,3,4,5,6\}$$

$$A_{0.6} = \{3,4,5\}$$

$$A_{1} = \{4\}$$

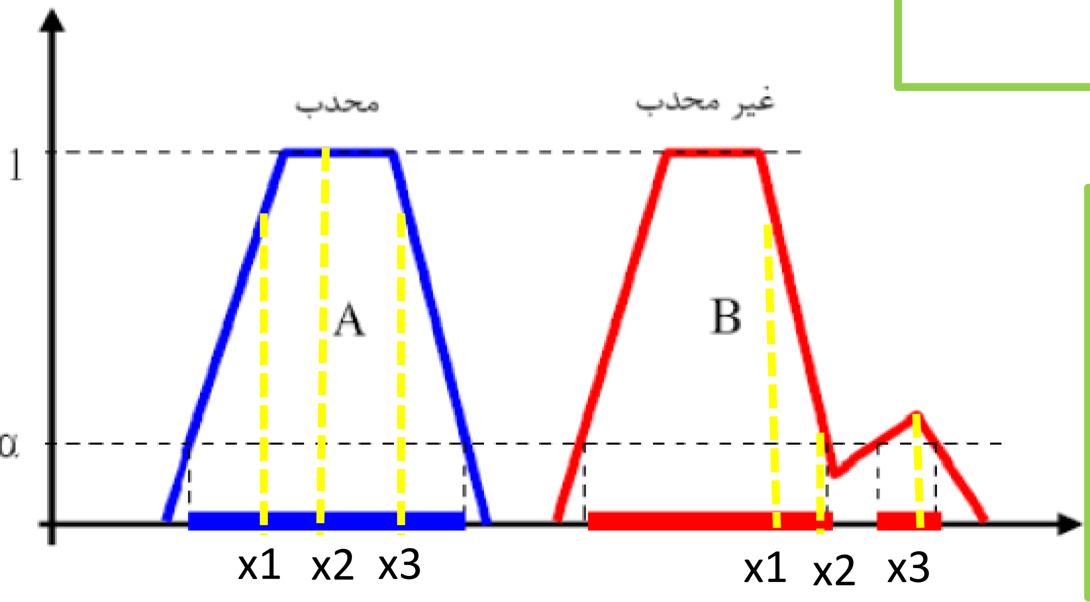
ب) مجموعه برش قوی آلفا در سطح ۰.۳

$$A'_{0.3} = \{2,3,4,5\}$$

<u>مجموعه فازی محدب:</u> مجموعه فازی $\tilde{A}$ محدب است اگر:

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\} \;; x_1, x_2 \in X, \lambda \in [0,1]$$

بعبارت دیگر، یک مجموعه فازی محدب است اگر همه مجموعه‌های در سطح α آن محدب باشند.



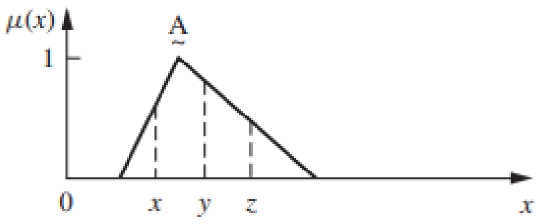
تعریف دیگری برای مجموعه های فازی محدب وجود دارد به طوری که مجموعه فازی $\tilde{A}$ محدب است اگر برای هر عنصر x_1، x_2 و x_3 که رابطه $x_1 < x_2 < x_3$ برقرار است رابطه ذیل برقرار باشد.

$$\mu_{\tilde{A}}(x_2) \geq \min[\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_3)]$$

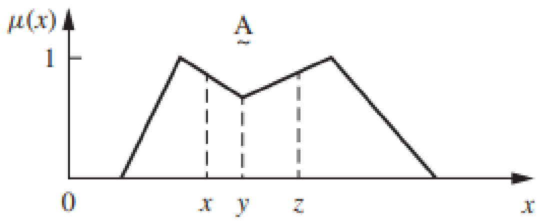
مجموعه فازی محدب:

یک مجموعه فازی را محدب گویند که با افزایش مقادیر عضویت در مجموعه مرجع، سه حالت ممکن برای درجات عضویتش رخ دهد:

- ✓ اول اینکه درجات عضویت آن به طور کاملا یکنوا افزایش می‌یابد
- ✓دوم آنکه درجات عضویت آنها به طور کاملا یکنوا کاهش می‌یابد
- ✓ سوم آنکه درجات عضویت آنها ابتدا به طور کاملا یکنوا افزایش یافته سپس به طور کاملا یکنوا کاهش می‌یابند.



(a)



(b)

کاردینالیتی مجموعه فازی

کاردینالیتی (عدد اصلی): کاردینالیتی یا عدد اصلی برای مجموعه متناهی $\tilde{A}$، بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$|\tilde{A}| = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

مجموعه پیوسته

$$\boxed{|\tilde{A}| = \int_x \mu_{\tilde{A}}(x)dx}$$

یا بعبارت دیگر، مجموع درجه عضویتهای یک مجموعه فازی متناهی را کاردینالیتی آن مجموعه می‌نامند.

کاردینالیتی نسبی: کاردینالیتی نسبی مجموعه فازی $\tilde{A}$ عبارت است از:

$$\|\tilde{A}\| = \frac{|\tilde{A}|}{|X|} \quad \Rightarrow \quad \|\tilde{A}\| = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) / \sum_{x \in X} 1$$

مثال: یک بنگاه معاملات ملکی می‌خواهد خانه‌هایی را که به مشتریان پیشنهاد می کند، طبقه‌بندی نماید. مشخصه راحتی این خانه‌ها، تعداد اطاقهای خواب است. اجازه دهید مجموعه $X = \{1,2,...,10\}$ را بعنوان انواع مختلف خانه‌های در دسترس که در آن X تعداد اتاق خواب موجود در خانه است تعریف کنیم. لذا مجموعه فازی "خانه راحت برای یک خانواده ۴ نفره" را می‌توان بصورت زیر بیان کرد:

$$\tilde{A} = \{(1,0.2),(2,0.5),(3,0.8),(4,1),(5,0.7),(6,0.3)\}$$

$$|\tilde{A}| = 0.2 + 0.5 + 0.8 + 1 + 0.7 + 0.3 = 3.5$$

$$\|\tilde{A}\| = \frac{3.5}{10} = 0.35$$

به بیان دیگر، گویی ۳/۵ نوع خانه در مجموعه فازی $\tilde{A}$ وجود دارد که برای یک خانواده ۴ نفره راحت است و همچنین از تمام خانه‌های مجموعه مرجع X، ۳۵ درصد آنها در مجموعه فازی خانه راحت برای یک خانواده ۴ نفره قرار دارند.

مثال:

$$\tilde{B} = \{(1,0.5),(2,0.8),(3,1),(4,0.8),(5,0.5)\}$$

$$\tilde{A} = \{(1,1),(2,1),(3,0.75),(4,0.5),(5,0.3),(6,0.3),(7,0.1),(8,0.1)\}$$

اشتراک؟

اجتماع؟

مکمل؟

فصل دوم

مجموعه های فازی   عملیات پایه روی مجموعه های فازی

مثال:

$$\tilde{B} = \{(1,0.5),(2,0.8),(3,1),(4,0.8),(5,0.5)\}$$

$$\tilde{A} = \{(1,1),(2,1),(3,0.75),(4,0.5),(5,0.3),(6,0.3),(7,0.1),(8,0.1)\}$$

اشتراک؟

$$\tilde{C} = \{(1,0.5),(2,0.8),(3,0.75),(4,0.5),(5,0.3)\}$$

اجتماع؟

$$\tilde{D} = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,0.8),(5,0.5),(6,0.3),(7,0.1),(8,0.1)\}$$

مکمل؟

$$\not\subset \tilde{B} = \{(1,0.5),(2,0.2),(4,0.2),(5,0.5),(6,1),(7,1),(8,1),\ldots\}$$

نکته: عملیات روی مجموعه های فازی بوسیله توابع عضویت آنها تعریف می شود.

اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی: تابع عضویت اشتراک $\mu_{\tilde{C}}(x)$ که در آن $\tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$ می‌باشد، بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\mu_{\tilde{C}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} \;;x \in X}$$

و تابع عضویت اجتماع دو مجموعه فازی که در آن $\tilde{D} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$ است بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\mu_{\tilde{D}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} \;;x \in X}$$

نکته: عملیات روی مجموعه های فازی بوسیله توابع عضویت آنها تعریف می شود.

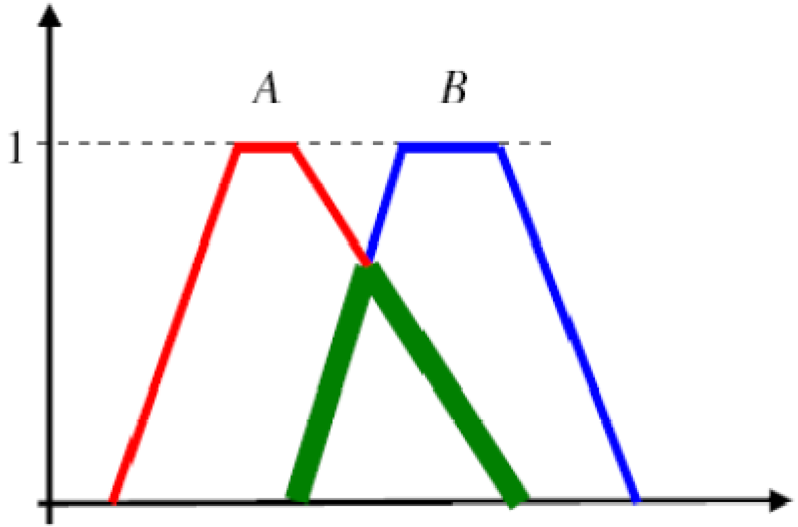
مکمل مجموعه فازی: تابع عضویت مکمل مجموعه فازی نرمال $\tilde{A}$، $\mu_{\complement\tilde{A}}(x)$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\mu_{\complement\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) \;; x \in X}$$

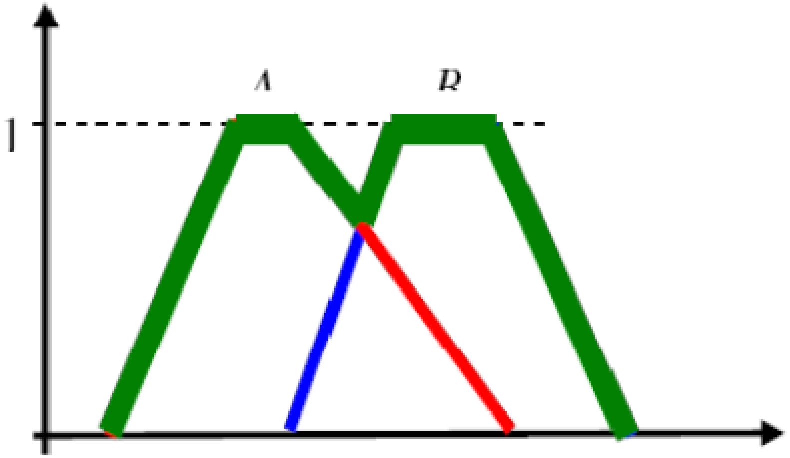
فصل دوم

مجموعه های فازی

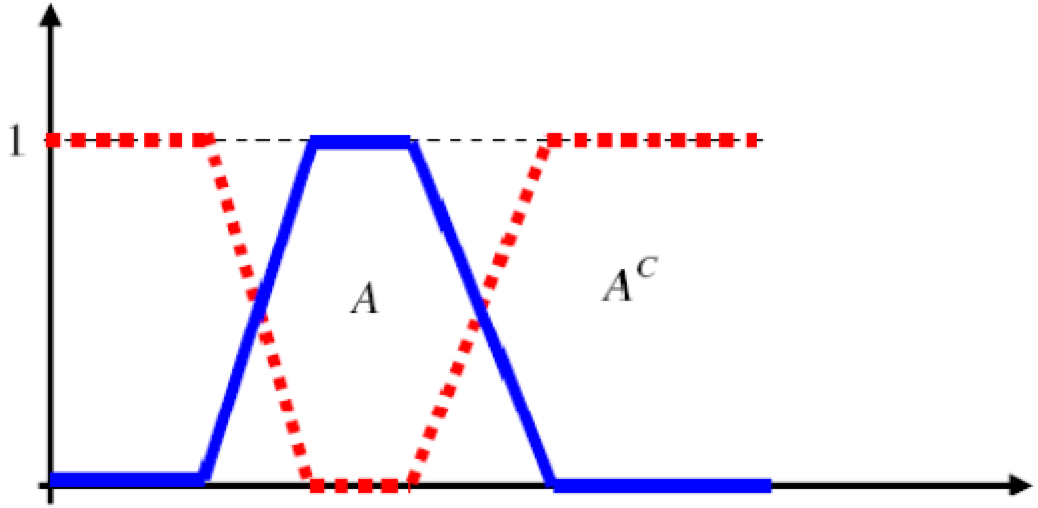
عملیات پایه روی مجموعه های فازی



اشتراک دو مجموعه فازی

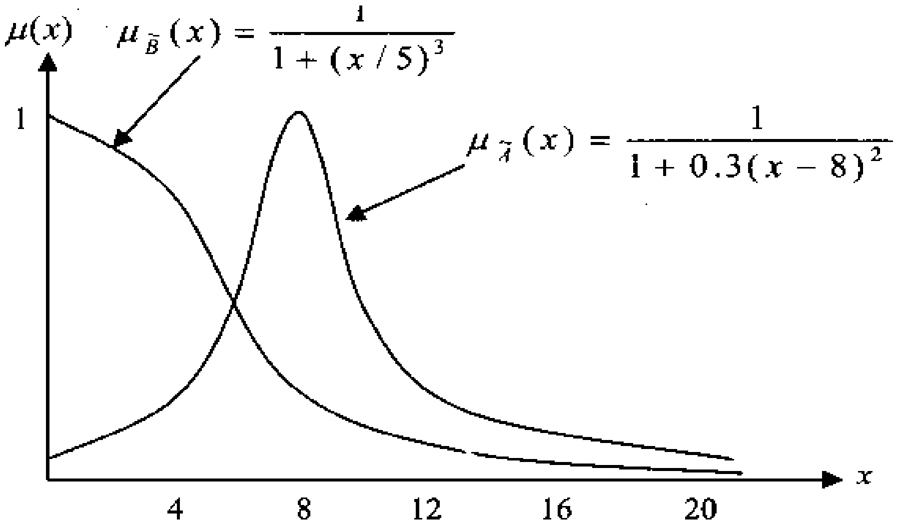


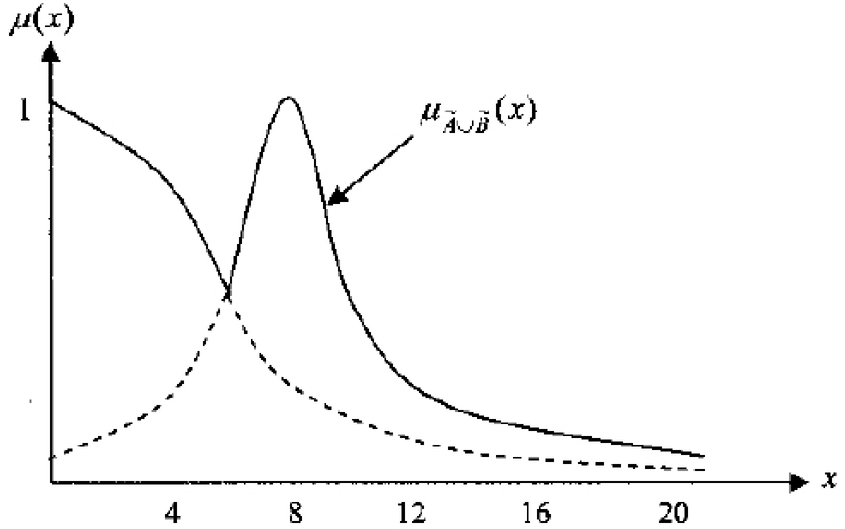
اجتماع دو مجموعه فازی

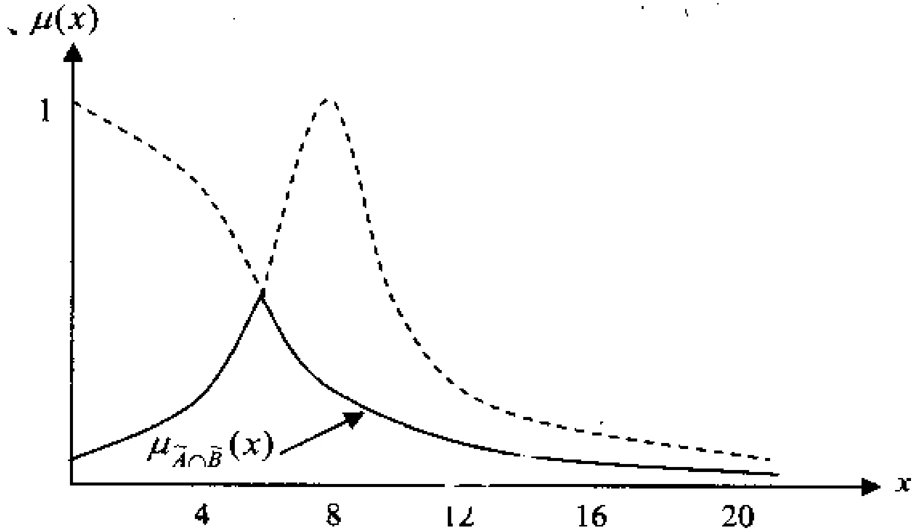


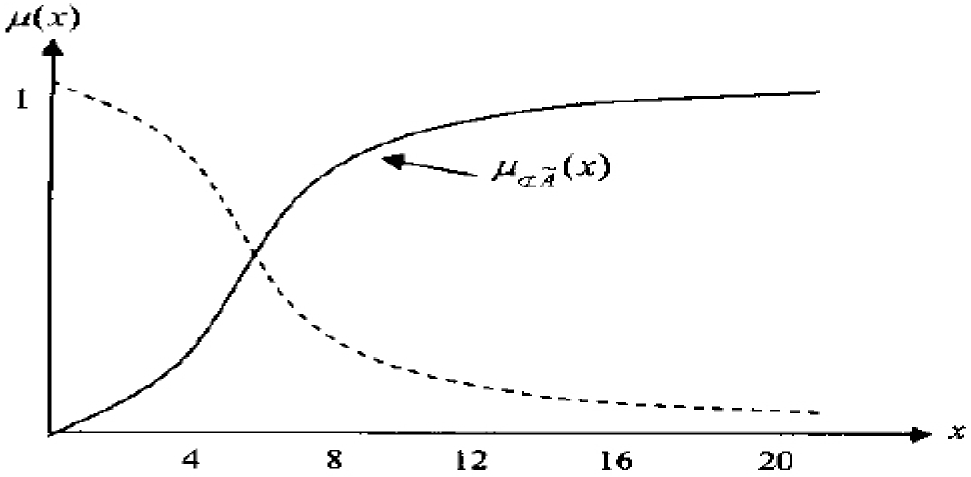
مکمل مجموعه فازی

عملیات پایه روی مجموعه های فازی









فصل دوم

مجموعه های فازی

خواص مجموعه های فازی

مجموعه‌های $\tilde{A}$، $\tilde{B}$ و $\tilde{C}$ بر روی مجموعه مرجع X تعریف شده‌اند.

۱) قانون نقیض دوگانه
$$\not\subset(\not\subset \tilde{A}) = \tilde{A}$$

۲) خودهمانی
$$\tilde{A} \cup \tilde{A} = \tilde{A}$$
$$\tilde{A} \cap \tilde{A} = \tilde{A}$$

۳) جابجایی
$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{B} \cap \tilde{A}$$
$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \cup \tilde{A}$$

۴) شرکت‌پذیری
$$(\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cup \tilde{C} = \tilde{A} \cup (\tilde{B} \cup \tilde{C})$$
$$(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cap \tilde{C} = \tilde{A} \cap (\tilde{B} \cap \tilde{C})$$

۵) پخشی
$$\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C})$$
$$\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C})$$

۶) جذب
$$\tilde{A} \cap (\tilde{A} \cup \tilde{B}) = \tilde{A}$$
$$\tilde{A} \cup (\tilde{A} \cap \tilde{B}) = \tilde{A}$$

۷) قانون دمورگان
$$\not\subset(\tilde{A} \cup \tilde{B}) = (\not\subset \tilde{A}) \cap (\not\subset \tilde{B})$$
$$\not\subset(\tilde{A} \cap \tilde{B}) = (\not\subset \tilde{A}) \cup (\not\subset \tilde{B})$$

- ✓ بیان این خواص در مجموعه های فازی از طریق درجات عضویت عناصر انجام می شود.

بعنوان مثال:

قانون دمورگان بر حسب توابع عضویت بصورت زیر نوشته می شود:

$$\boxed{\not\subset(\mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x)) = \mu_{\not\subset \tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\not\subset \tilde{B}}(x)}$$

تمرین:

فرض کنید مجموعه‌های فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ بر روی مجموعه مرجع X تعریف شده‌اند.

الف) مطلوب است اثبات قوانین دمورگان، شمولیت و تباین.

قانون دمورگان	$\not\subset (\tilde{A} \cup \tilde{B}) = (\not\subset \tilde{A}) \cap (\not\subset \tilde{B})$
قانون شمولیت	$\tilde{A} \cup \not\subset \tilde{A} = X$
قانون تباین	$\tilde{A} \cap \not\subset \tilde{A} = \Phi$

ب) آیا این قوانین برای مجموعه‌های فازی برقرار است. چرا؟

و منطقی
^
and

نکته مهم آن است که عملگرهای *min* و *max* تنها عملگرها برای مدلسازی، اشتراک یا اجتماع مجموعه‌های فازی نیستند.

یا منطقی
V
or

توسعه عملیات بر روی مجموعه های فازی
عملگرهای جبری

جمع جبری مجموعه های فازی

جمع جبری دو مجموعه فازی، یک مجموعه فازی خواهد بود که به شرح ذیل است :

$$\tilde{C} = \tilde{A} + \tilde{B}$$

$$\tilde{C} = \{(x, \mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x) \mid x \in X\}$$

جاییکه :

$$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x)$$

در واقع عملگر جمع جبری به عنوان یک عملگر اجتماع مجموعه های فازی می تواند استفاده شود.

جمع کران دار مجموعه های فازی

جمع کران دار دو مجموعه فازی به صورت ذیل تعریف می شود :

$$\tilde{C} = \tilde{A} \oplus \tilde{B}$$

$$\tilde{C} = \{ (x, \mu_{\tilde{A} \oplus \tilde{B}}(x)) \mid x \in X \}$$

جاییکه :

$$\mu_{\tilde{A} \oplus \tilde{B}}(x) = \min\{ 1, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) \}$$

این عملگر نیز می تواند به عنوان یک عملگر اجتماع مجموعه های فازی استفاده شود.

توسعه عملیات بر روی مجموعه های فازی
عملگرهای جبری

تفاضل کران دار مجموعه های فازی

تفاضل کران دار دو مجموعه فازی به صورت ذیل تعریف می شود :

$$\tilde{C} = \tilde{A} - \tilde{B}$$

$$\tilde{C} = \{ (x, \mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}(x) \mid x \in X \}$$

جاییکه :

$$\boxed{\mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}(x) = \max\{0, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - 1\}}$$

عملگر تفاضل کران دار می تواند به عنوان یک عملگر اشتراک مجموعه های فازی استفاده شود.

ضرب جبری مجموعه های فازی

ضرب جبری دو مجموعه فازی به صورت ذیل خواهد بود :

$$\tilde{C} = \tilde{A}.\tilde{B}$$

$$\boxed{\tilde{C} = \{ (x, \mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x) \mid x \in X \}}$$

عملگر ضرب جبری نیز می تواند به عنوان یک عملگر اشتراک استفاده شود.

مثال: فرض کنید مجموعه های فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به صورت ذیل تعریف شوند :

$$\tilde{A} = \{ (3,0.5), (5,1), (7,0.6) \}$$

$$\tilde{B} = \{ (3,1), (5,0.6) \}$$

با اعمال عملگرهای تعریف شده خواهیم داشت :

$$\tilde{A} + \tilde{B} = \{ (3,1), (5,1), (7,0.6) \}$$

$$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x)$$

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \{ (3,1), (5,1), (7,0.6) \}$$

$$\mu_{\tilde{A}\oplus\tilde{B}}(x) = \min\{ 1, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) \}$$

$$\tilde{A} - \tilde{B} = \{ (3,0.5), (5,0.6) \}$$

$$\mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}(x) = \max\{ 0, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - 1 \}$$

$$\tilde{A}.\tilde{B} = \{ (3,0.5), (5,0.6) \}$$

و منطقی
^
and

نکته مهم آن است که عملگرهای *min* و *max* تنها عملگرها برای مدلسازی، اشتراک یا اجتماع مجموعه‌های فازی نیستند.

یا منطقی
v
or

عملگرها در ۲ سطح کلی مورد بررسی قرار می گیرند:

۱) عملگرهای اشتراک و اجتماع که تحت عنوان عملگرهای t نرم و s نرم تعریف می‌شوند ،

۲) عملگرهای میانگین که حد وسط عملگرهای t نرم و s نرم قرار می گیرند.

هریک از این سطوح، شامل عملگرهای پارامتری و غیرپارامتری نیز می باشد.

انواع اجتماعها:
max یکی از انواع s نرمهاست.

انواع اشتراکها:
min یکی از انواع t نرمهاست.

(عملگر اجتماع فازی) : $\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) = S[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)]$

(عملگر اشتراک فازی) : $\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = t[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)]$

توسعه عملیات بر روی مجموعه های فازی
عملگرهای تئوری مجموعه ها

درجه عضویت هستند

مثلِ
Min
ضرب جبری
تفاضل کراندار

t نرمها: t نرمها توابع دو ارزشی از فضای $[0,1]\times[0,1]$ بر $[0,1]$ هستند که دارای شرایط زیر می‌باشند:

1) $t(0,0)=0\ ;\ t(\mu_{\tilde{A}}(x),1)=t(1,\mu_{\tilde{A}}(x))=\mu_{\tilde{A}}(x),\ \ x\in X$

2) $t(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x))\le t(\mu_{\tilde{C}}(x),\mu_{\tilde{D}}(x))\ \ if\ \ \mu_{\tilde{A}}(x)\le\mu_{\tilde{C}}(x)\ and\ \mu_{\tilde{B}}(x)\le\mu_{\tilde{D}}(x)$ یکنوایی

3) $t(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x))=t(\mu_{\tilde{B}}(x),\mu_{\tilde{A}}(x))$ جابجایی

4) $t(\mu_{\tilde{A}}(x),t(\mu_{\tilde{B}}(x),\mu_{\tilde{C}}(x)))=t(t(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)),\mu_{\tilde{C}}(x))$ شرکت‌پذیری

توابع t نرم، سطح کلی از عملگرهای اشتراک مجموعه‌های فازی را مشخص می‌کنند.

فصل دوم

مجموعه های فازی

توسعه عملیات بر روی مجموعه های فازی

عملگرهای تئوری مجموعه ها

درجه عضویت هستند

***s* نرمها (*t* همنرمها):** *s* نرمها دارای خاصیت شرکت‌پذیری، جابجایی و یکنوایی هستند. آنها توسط تابع دو متغیره *s* که نگاشتی است از $[0,1]\times[0,1]$ بر $[0,1]$ نشان داده می‌شوند. این خواص در زیر نشان داده شده‌اند:

$$1)\ s(1,1)=1\ ;\ s(\mu_{\tilde{A}}(x),0)=s(0,\mu_{\tilde{A}}(x))=\mu_{\tilde{A}}(x),\ \ x\in X$$

مثلِ
max
جمع جبری
جمع کراندار

یکنوایی
$$2)\ s(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x))\le s(\mu_{\tilde{C}}(x),\mu_{\tilde{D}}(x))\ \ if\ \ \mu_{\tilde{A}}(x)\le\mu_{\tilde{C}}(x)\ and\ \mu_{\tilde{B}}(x)\le\mu_{\tilde{D}}(x)$$

جابجایی
$$3)\ s(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x))=s(\mu_{\tilde{B}}(x),\mu_{\tilde{A}}(x))$$

شرکت‌پذیری
$$4)\ s(\mu_{\tilde{A}}(x),s(\mu_{\tilde{B}}(x),\mu_{\tilde{C}}(x)))=s(s(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)),\mu_{\tilde{C}}(x))$$

ارتباط بین عملگرهای t و s :

تبدیل عملگرهای t به s و بالعکس در فضای ($[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$) از طریق رابطه ذیل انجام می شود :

$$t(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) = 1 - s(1 - \mu_{\tilde{A}}(x), 1 - \mu_{\tilde{B}}(x))$$

در نتیجه، با استفاده از این معادله، هر s نرم می‌تواند از یک t نرم حاصل شود.

فصل دوم
مجموعه های فازی

تعدادی از عملگرهای غیرپارامتری t نرم و s نرم :

ضرب پایه

min

$$t_w \le t_1 \le t_{1.5} \le t_2 \le t_{2.5} \le t_3$$

$$s_3 \le s_{2.5} \le s_2 \le s_{1.5} \le s_1 \le s_w$$

max

جمع پایه

ضرب پایه	$t_w(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)) = \begin{cases} \min\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\} & ;if\ \max\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\}=1 \\ 0 & ;otherwise \end{cases}$
جمع پایه	$s_w(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)) = \begin{cases} \max\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\} & ;if\ \min\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\}=0 \\ 1 & ;otherwise \end{cases}$
تفریق کراندار	$t_1(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)) = \max\{0, \mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)-1\}$
جمع کراندار	$s_1(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)) = \min\{1, \mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)\}$
ضرب انیشتین	$t_{1.5}(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)) = \dfrac{\mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)}{2-[\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)-\mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)]}$
جمع انیشتین	$s_{1.5}(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)) = \dfrac{\mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)}{1+\mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)}$
ضرب جبری	$t_2(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)) = \mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)$
جمع جبری	$s_2(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)) = \mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)-\mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)$
ضرب هاماچر	$t_{2.5}(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)) = \dfrac{\mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)}{\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)-\mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)}$
جمع هاماچر	$s_{2.5}(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)) = \dfrac{\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)-2\mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)}{1-\mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)}$
مینیمم	$t_3(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\}$
ماکزیمم	$s_3(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\}$

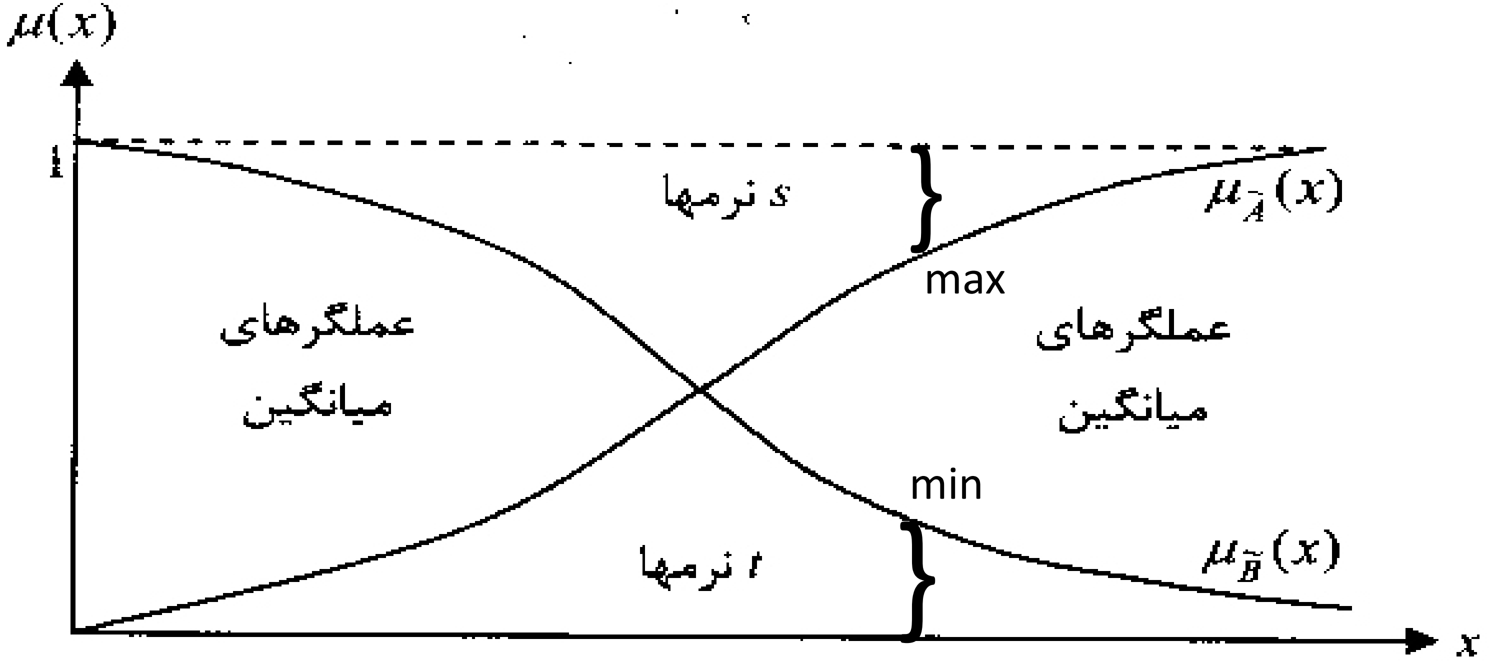
فصل دوم
مجموعه های فازی

$\tilde{B} = \{(10,0.7), (15,0.3), (20,1)\}$

$\tilde{C} = \{(15,0.6), (20,0.4), (25,0.8)\}$

$\tilde{B} \cap \tilde{C} =$ −عملگرحداقل−→ $\{(15,0.3), (20,0.4)\}$

$\tilde{B} \cap \tilde{C} =$ −عملگرضربجبري−→ $\{(15,0.18), (20,0.4)\}$



ناحیه‌های نگاشت خروجي عملگرهای t نرم، s نرم و میانگین

با توجه به مطالب فوق، می‌توانیم عملگرهایی تعریف نماییم که در فاصله فوق باشند و با تغییر پارامتری همچون u اشکال مختلفی از t نرمها و s نرمها بدست آید که هریک برای موقعیتها و شرایط خاصی مناسب باشند.

اشتراک و اجتماع هاماچر: اشتراک دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ توسط عملگر اشتراک هاماچر به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A}\cap\tilde{B}=\{(x,\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x))\mid x\in X\}$$

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)=\frac{\mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x)}{\gamma+(1-\gamma)(\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)-\mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x))}\;;\gamma\geq 0$$

پارامتر

ضربجبري $\gamma = 1 \rightarrow$

اجتماع دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ توسط عملگر اجتماع هاماچر به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A}\cup\tilde{B}=\{(x,\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x))\mid x\in X\}$$

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)=\frac{\mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x)}{1+\gamma'\mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x)}\;;\gamma'\geq -1$$

اشتراک و اجتماع یاگر: اشتراک دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ توسط عملگر اشتراک یاگر به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A}\cap\tilde{B}=\{(x,\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x))\mid x\in X\}$$

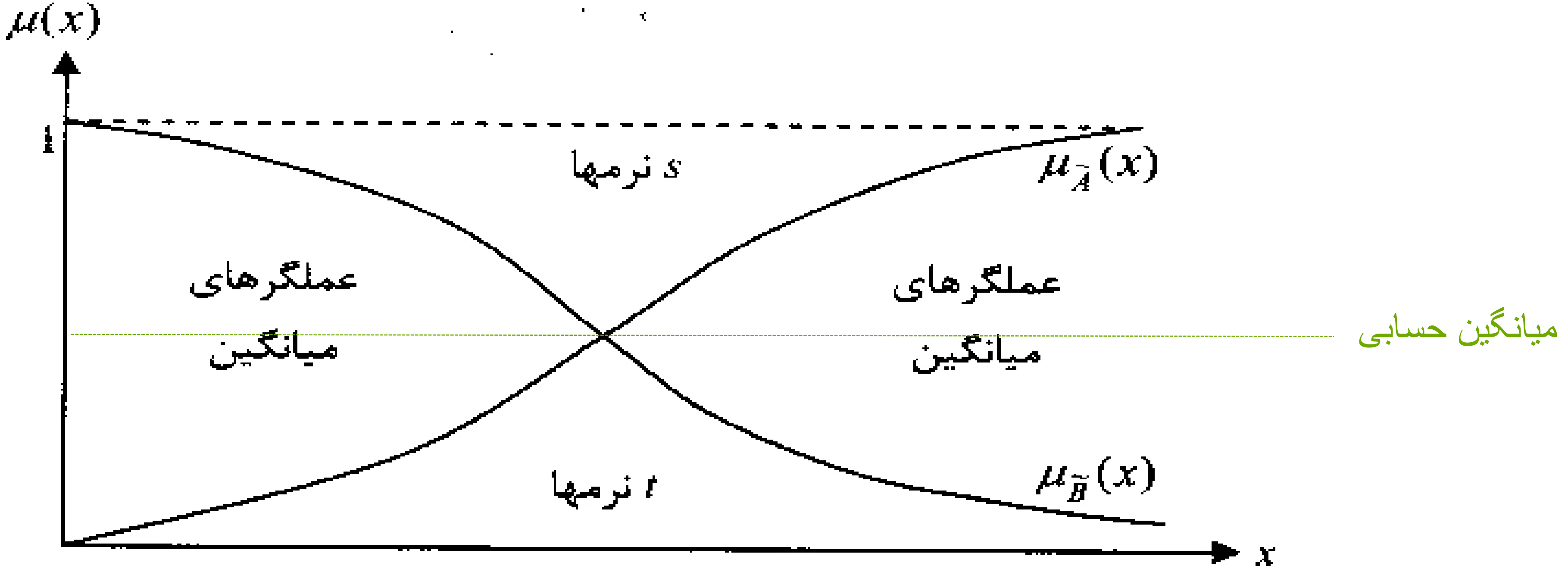
$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)=1-\min\{1,((1-\mu_{\tilde{A}}(x))^{p}+(1-\mu_{\tilde{B}}(x))^{p})^{1/p}\}\;;p\geq 1$$

و اجتماع یاگر عبارتست از:

$$\tilde{A}\cup\tilde{B}=\{(x,\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x))\mid x\in X\}$$

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)=\min\{1,((\mu_{\tilde{A}}(x))^{p}+(\mu_{\tilde{B}}(x))^{p})^{1/p}\}\;;p\geq 1$$

پارامتر



ناحیه‌های نگاشت خروجي عملگرهای t نرم، s نرم و میانگین

پایان فصل دوم

تمرین ۱. $(\alpha = 0.4)$

مجموعه‌های در سطح α و مجموعه‌های قوی در سطح α را برای اعداد فازی زیر تعیین کنید:

الف) $\tilde{A} = \{(3,1),(4,0.2),(5,0.3),(6,0.4),(7,0.6),(8,0.8),(10,1),(12,0.8),(14,0.6)\}$

ب) $\tilde{B} = \{(x, \mu_{\tilde{B}}(x)) / \mu_{\tilde{B}}(x) = (1 + (x-10)^2)^{-1}\}$

ج) $\tilde{C} = \{(x, \mu_{\tilde{C}}(x)) / x \in R\}$

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \begin{cases} 0 & ; x \le 10 \\ (1 + (x-10)^{-2})^{-1} & ; x > 10 \end{cases}$$

کدام مجموعه های فازی محدب اند و کدامیک غیر محدب اند؟

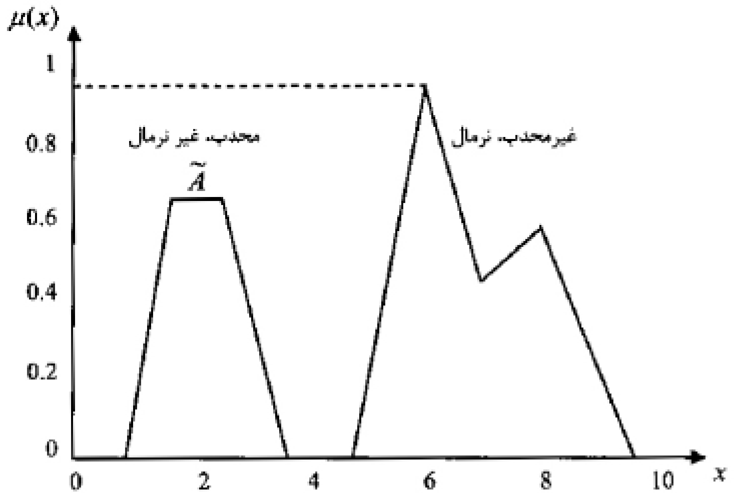
تمرین ۲.

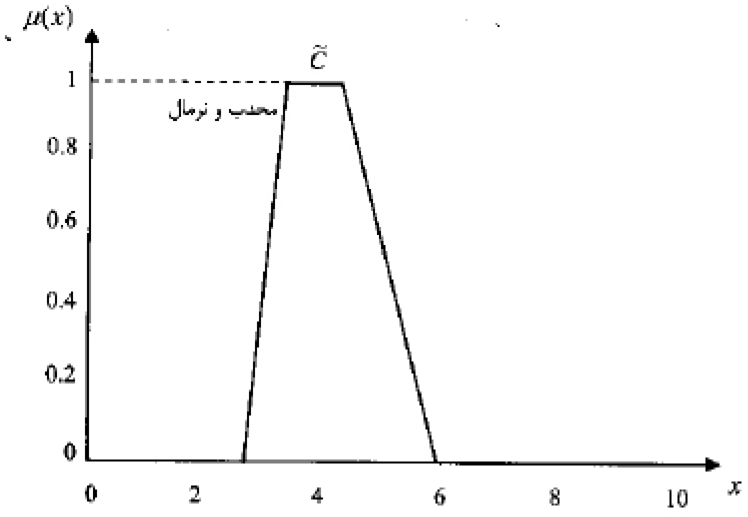
اشتراک و اجتماع مجموعه های فازی $\tilde{B}$ و $\tilde{C}$ در تمرین ۱ را تعیین کنید.

فصل سوم

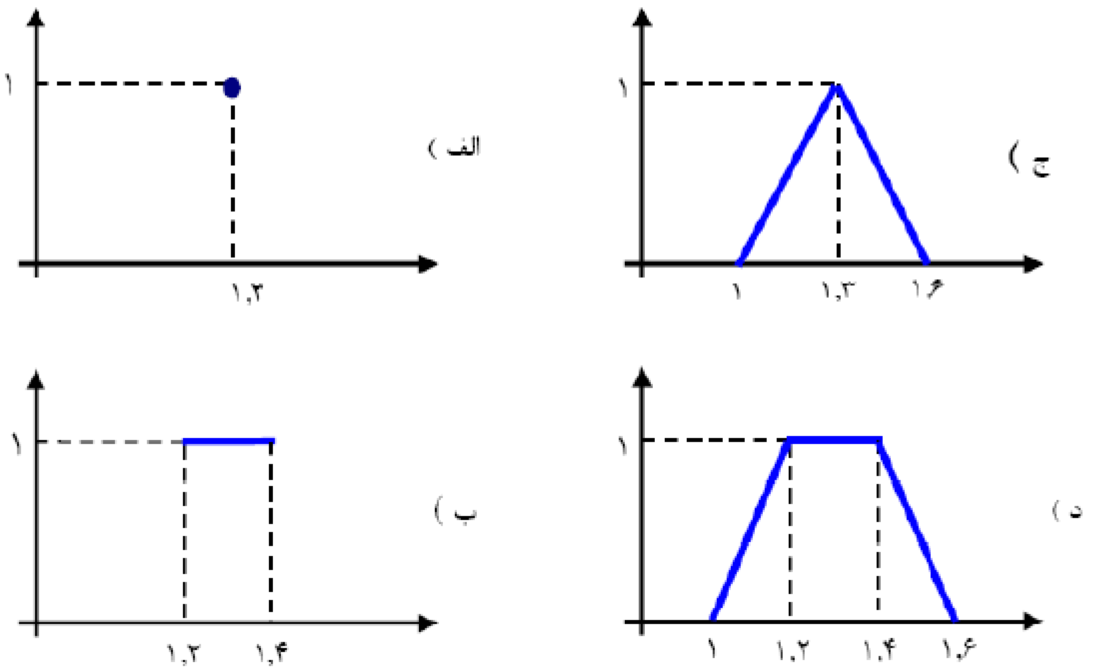
اعداد فازی

اعداد فازی بر روی مجموعه‌ای از اعداد حقیقی و زیرمجموعه‌هایش تعریف شده و تابع عضویت آنها باید *نرمال* و محدب باشد.





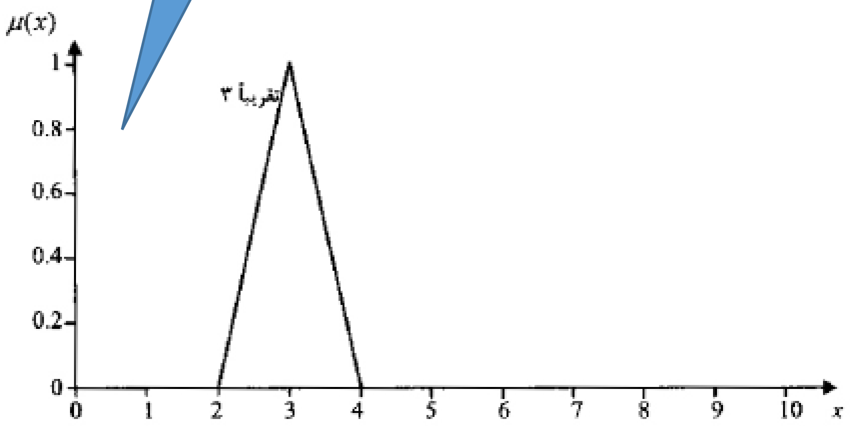
اعداد فازی، مجموعه های فازی هستند که معانی عباراتی همچون تقریبا، نزدیک به، نه کاملا ۱.۳ را بیان می کنند.



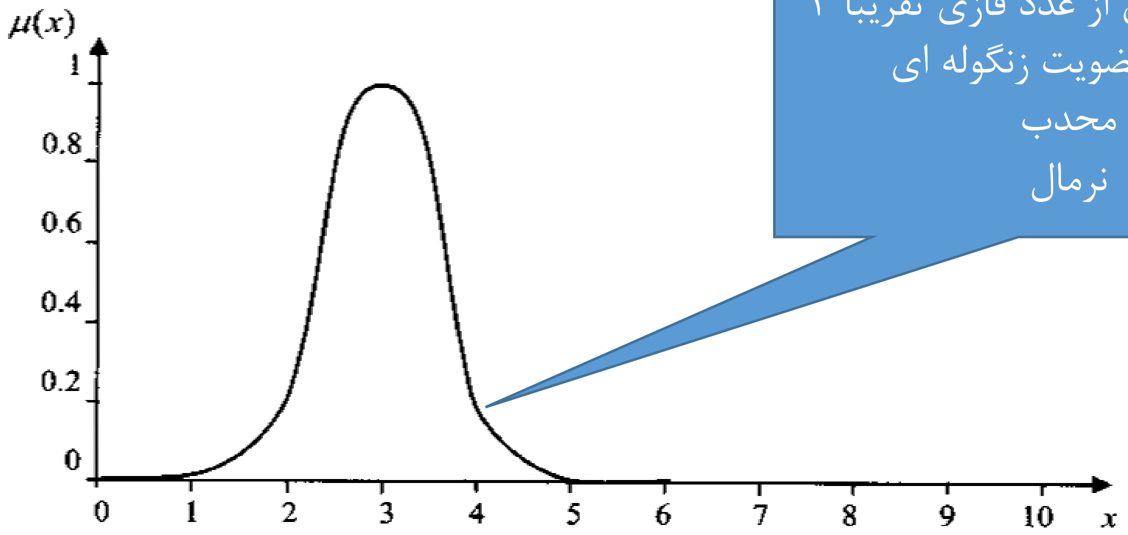
مقایسه عدد و بازه حقیقی معمولی با عدد و بازه حقیقی فازی

مطابق با آنچه بیان شد، اعداد فازی مجموعه‌های فازی هستند که برای توصیف مفاهیمی نظیر در حدود، تقریباً و نزدیک به استفاده می‌شوند. توجه داریم که به هر جهت، معانی زیادی برای یک عبارت مثل در حدود ۳ وجود دارد.

نمایش عدد فازی تقریبا ۳ با تابع عضویت مثلثی
محدب
نرمال



نمایش دیگری از عدد فازی تقریبا ۳ با تابع عضویت زنگوله ای
محدب
نرمال



بنابراین، مجموعه‌های مختلفی ممکن است برای توصیف مفهوم در حدود ۳ بکار برده شوند.

نمایش جدولی عدد فازی تقریباً ۳

	0.4	0.7	1	0.7	0.4	0.2	0.1	0	0
α=1.0			1						
α=0.9			1						
α=0.8			1						
α=0.7		1	1	1					
α=0.6		1	1	1					
α=0.5		1	1	1					
α=0.4	1	1	1	1	1				
α=0.3	1	1	1	1	1				
α=0.2	1	1	1	1	1	1			
α=0.1	1	1	1	1	1	1	1		
α=0.0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

اشکال معروف و پرکاربرد اعداد فازی عبارتند از : عدد فازی مثلثی ، عدد فازی ذوزنقه ای ، عدد فازی گوسی ، عدد فازی زنگوله ای (bell shape) و عدد فازی سیگمویدال افزایشی یا کاهشی

نمایش اعداد فازی

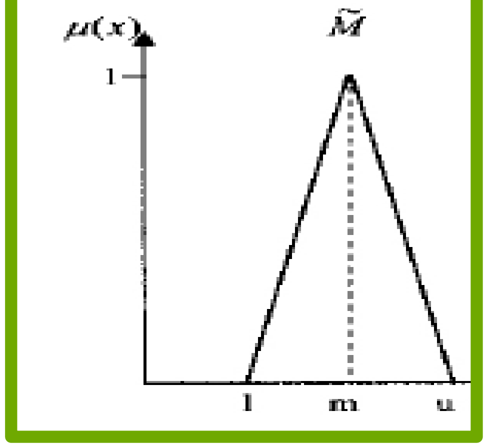
$$\tilde{M} = (l, m, u)$$

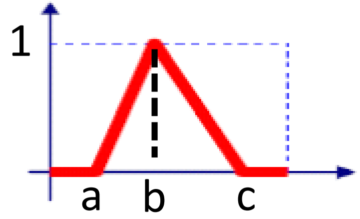
- تابع عضویت مثلثی: Triangular MF

تابع عضویت مثلثی توسط سه پارامتر $\{ a, b, c \}$ تعریف می شود که به شرح ذیل می باشد.

$$\mu_{\tilde{M}}(x) = \begin{cases} (x-l)/(m-l) & ; l < x \le m \\ (u-x)/(u-m) & ; m < x \le u \\ 0 & ; otherwise \end{cases}$$

$$trn(x : a, b, c) = \begin{cases} 0 & , x < a \\ (x-a)/(b-a) & , a \le x \le b \\ (c-x)/(c-b) & , b \le x \le c \\ 0 & , x > c \end{cases}$$



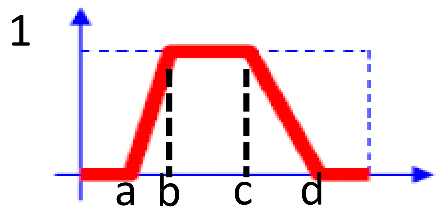


تابع عضویت مثلثی

– تابع عضویت ذوزنقه ای: **Trapezoidal MF**

تابع عضویت ذوزنقه ای توسط چهار پارامتر $\{\ a,b,c,d\ \}$ به شرح ذیل تعریف می شود:

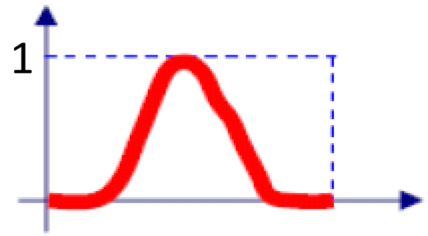
$$trn(x:a,b,c,d)=\begin{cases}0 & ,x<a\\ (x-a)/(b-a) & ,a\le x<b\\ 1 & ,b\le x<c\\ (d-x)/(d-c) & ,c\le x<d\\ 0 & ,x>d\end{cases}$$



- تابع عضویت گوسی: Gaussian MF

تابع عضویت گوسی با دو پارامتر $\{a,\sigma\}$ به شرح ذیل تعریف می شود:

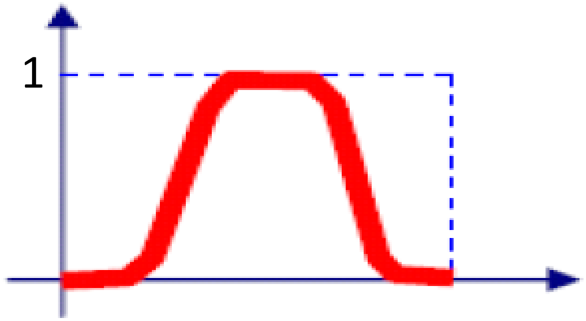
$$gsn(x:a,\sigma)=\exp\left(\frac{-(x-a)^2}{\sigma^2}\right)$$



- تابع عضویت زنگوله ای: Bell-Shape MF

تابع عضویت زنگوله ای با سه پارامتر $\{\ a,b,\sigma\ \}$ به شرح ذیل تعریف می شود:

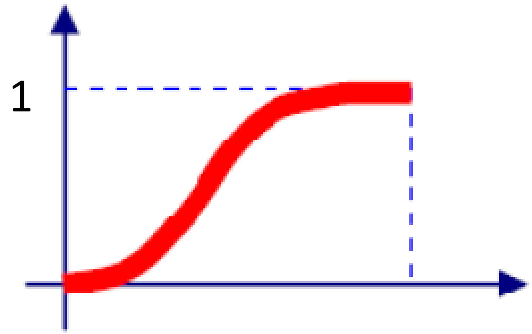
$$bll(x:a,b,\sigma)=\frac{1}{1+\left|\frac{x-\sigma}{a}\right|^{2b}}$$



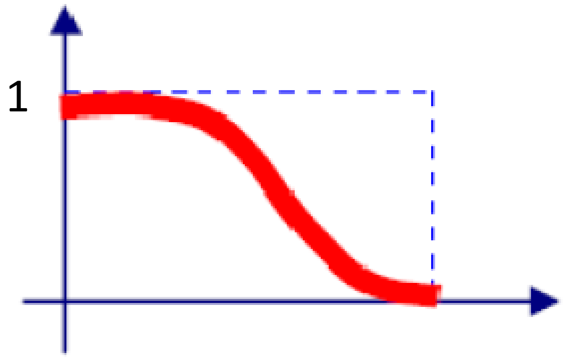
تابع عضویت سیگمویدال :

تابع عضویت سیگمویدال با دو پارامتر a و b به شرح ذیل تعریف می شود:

$$Sgm\,(x : a, b) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-b)}}$$



تابع عضویت افزایشی



تابع عضویت کاهشی

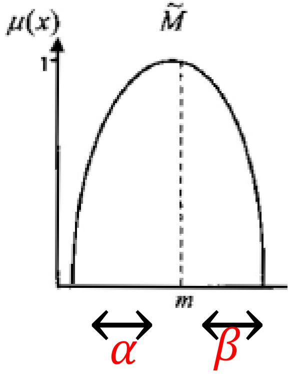
اعداد فازی مثلثی $L\text{-}R$ و ذوزنقه‌ای $L\text{-}R$

عدد فازی $\tilde{M}$ از نوع $L\text{-}R$ است اگر توابع مرجع L (برای چپ) و R (برای راست) و نیز اسکالرهای $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ با شرایط زیر موجود باشند:

۱) $R(x) = R(-x)$, $L(x) = L(-x)$

۲) $R(0) = L(0) = 1$ و $L(+\infty) = R(+\infty) = 0 \; or \; L(1) = R(1) = 0$

۳) L روی فاصله $[0,+\infty]$ غیرافزایشی باشد



$$\tilde{M} = (m, \alpha, \beta)$$

به بیان دیگر، عدد فازی $\tilde{M}$ را از نوع $L\text{-}R$ گویند اگر و تنها اگر:

$$\mu_{\tilde{M}}(x) = \begin{cases} L(\frac{m-x}{\alpha}) & ; x \le m, \alpha > 0 \\ R(\frac{x-m}{\beta}) & ; x \ge m, \beta > 0 \end{cases}$$

جائیکه m میانگین عدد فازی $\tilde{M}$ بوده و α و β بترتیب کران چپ و راست آن می‌باشند.

$$L(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

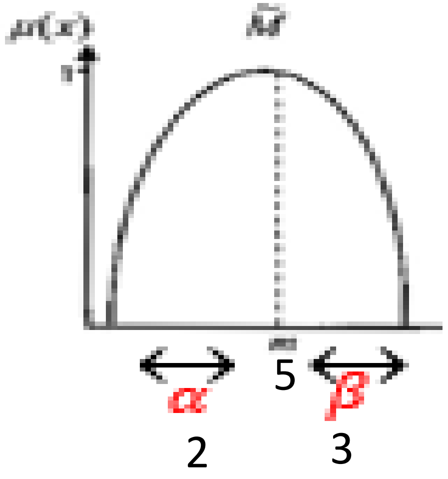
$$R(x) = \frac{1}{1+2|x|}$$

$$\alpha = 2, \beta = 3, m = 5$$

۱) $R(x) = R(-x)\ ,\ L(x) = L(-x)$

۲) $R(0) = L(0) = 1$ و $L(+\infty) = R(+\infty) = 0 \ or\ L(1) = R(1) = 0$

۳) L روی فاصله $[0,+\infty)$ غیر افزایشی باشد



$$\mu_{\tilde{M}}(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{5-x}{2}\right) = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{5-x}{2}\right)^2} & \text{for} \quad x \le 5 \\ R\left(\dfrac{x-5}{3}\right) = \dfrac{1}{1+\left|\dfrac{2(x-5)}{3}\right|} & \text{for} \quad x \ge 5 \end{cases}$$

Definition 1. (Dubois and Prade [4]) A shape function L (or R) is a decreasing function from $\Re^+ \to [0, 1]$ such that

(1) $L(0) = 1$;
(2) $L(x) < 1, \ \forall x > 0$;
(3) $L(x) > 0, \ \forall x < 1$;
(4) $L(1) = 0$ [*or* $L(x) > 0, \ \forall x$ *and* $L(+\infty) = 0$].

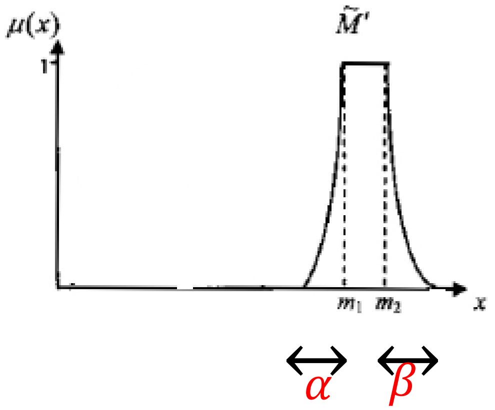
Example 2.1. Different functions can be chosen for $L(x)$ (or $R(x)$). For instance, as mentioned by Dubois and Prade [6], $L(x) = \max\{0, 1 - x^p\}$ with $p > 0$; $L(x) = e^{-x}$; and $L(x) = 1/(1 + x^2)$.

و اگر مقدار حداکثر عدد ، یک فاصله باشد آنگاه بصورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\tilde{M}' = (m_1, m_2, \alpha, \beta)$$

که برای آن داریم:

$$\mu_{\tilde{M}'}(x) \begin{cases} L\left(\dfrac{m_1 - x}{\alpha}\right) & ; x \le m_1, \alpha > 0 \\ 1 & ; m_1 \le x \le m_2 \\ R\left(\dfrac{x - m_2}{\beta}\right) & ; x \ge m_2, \beta > 0 \end{cases}$$



(1) $L(0) = 1;$
(2) $L(x) < 1, \ \forall x > 0;$
(3) $L(x) > 0, \ \forall x < 1;$
(4) $L(1) = 0 \ [or \ L(x) > 0, \ \forall x \ and \ L(+\infty) = 0].$

$$\mu_{\tilde{M}}(x)\begin{cases} L(\frac{m_1 - x}{\alpha}) & ;x \le m_1, \alpha > 0 \\ 1 & ;m_1 \le x \le m_2 \\ R(\frac{x - m_2}{\beta}) & ;x \ge m_2, \beta > 0 \end{cases}$$

مثال عدد فازی $\tilde{A}$ به صورت $\tilde{A} = (1, 1.5, 1, 1)$ تعریف می شود که توابع L_A و R_A نیز به شرح ذیل تعریف شده اند :

$$L_A = \max(1 - x^2, 0)$$
$$R_A = \max(0, 1 - x)$$

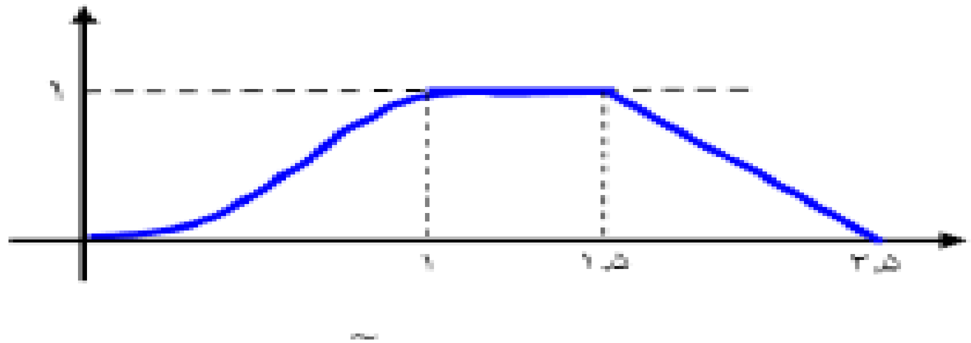
در این صورت تابع عضویت $\tilde{A}$ به شرح ذیل به دست می آید :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [1, 1.5] \\ \max(1 - (\frac{1 - x}{1})^2, 0) & x \le 1 \\ \max(0, 1 - (\frac{x - 1.5}{1})) & x \ge 1.5 \end{cases}$$

نمایش اعداد فازی

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}1 & x\in[1,1.5]\\ \max(2x-x^2,0) & x\le 1\\ \max(0,2.5-x) & x\ge 1.5\end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}1 & x\in[1,1.5]\\ 2x-x^2 & 0\le x\le 1\\ 2.5-x & 1.5\le x\le 2.5\end{cases}$$



فصل سوم

اعداد فازی

نمایش اعداد فازی

واضح است که اعداد فازی مثلثی و ذوزنقه‌ای، نوع خاصی از اعداد فازی $L\text{-}R$ هستند که کرانهای آنها خطی است. داریم:

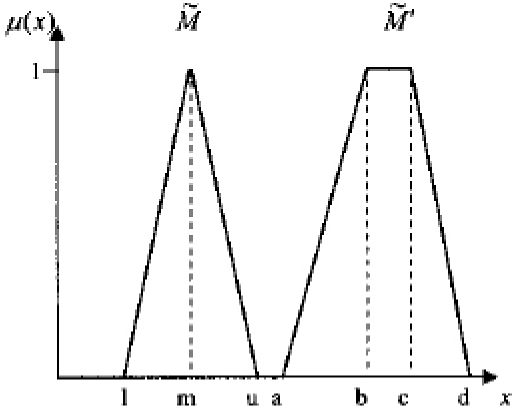
$$\widetilde{M} = (l, m, n) = (m, \alpha, \beta)$$

جائیکه $\alpha = m - l$ و $\beta = u - m$ می باشد.

بطور مشابه داریم:

$$\widetilde{M} = (a, b, c, d) = (b, c, \alpha, \beta)$$

جائیکه $\alpha = b - a$ و $\beta = d - c$ است.



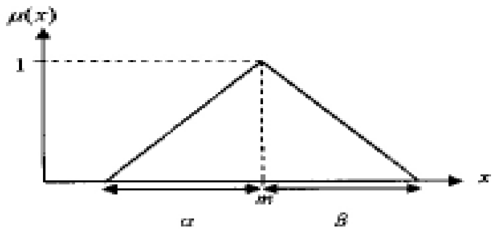
اعداد فازی مثلثی و ذوزنقه‌ای

اعداد فازی

نمایش اعداد فازی

عملیات جبری روی اعداد مثلثی $\tilde{M}=(m,\alpha,\beta)$ و $\tilde{N}=(n,\gamma,\delta)$

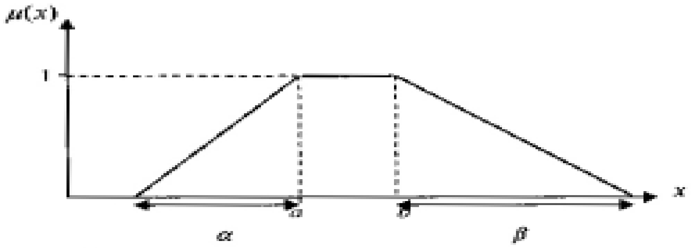
تصویر $\tilde{M}$	$-\tilde{M}=(-m,\beta,\alpha)$
معکوس $\tilde{M}$	$\tilde{M}^{-1}=(m^{-1},\beta m^{-2},\alpha m^{-2})$
جمع دو عدد فازی	$\tilde{M}+\tilde{N}=(m+n,\alpha+\gamma,\beta+\delta)$
تفریق دو عدد فازی	$\tilde{M}-\tilde{N}=(m-n,\alpha+\delta,\beta+\gamma)$
ضرب دو عدد فازی	$\tilde{M}>0,\tilde{N}>0:\tilde{M}.\tilde{N}=(mn,m\gamma+n\alpha,m\delta+n\beta)$
	$\tilde{M}<0,\tilde{N}>0:\tilde{M}.\tilde{N}=(mn,n\alpha-m\delta,n\beta-m\gamma)$
	$\tilde{M}<0,\tilde{N}<0:\tilde{M}.\tilde{N}=(mn,-n\beta-m\delta,-n\alpha-n\gamma)$
ضرب اسکالر	$k\in R^{+}:k.\tilde{M}=(km,k\alpha,k\beta)$
	$k\in R^{-}:k.\tilde{M}=(km,-k\beta,-k\alpha)$
تقسیم دو عدد فازی	$\tilde{M}>0,\tilde{N}>0:\tilde{M}\div\tilde{N}=\left(\frac{m}{n},\frac{m\delta+n\alpha}{n^2},\frac{m\gamma+n\beta}{n^2}\right)$
	$\tilde{M}<0,\tilde{N}>0:\tilde{M}\div\tilde{N}=\left(\frac{m}{n},\frac{n\alpha-m\gamma}{n^2},\frac{n\beta-m\delta}{n^2}\right)$
	$\tilde{M}<0,\tilde{N}<0:\tilde{M}\div\tilde{N}=\left(\frac{m}{n},\frac{-n\beta-m\gamma}{n^2},\frac{-n\alpha-m\delta}{n^2}\right)$



عدد فازی مثلثی $\tilde{M}=(m,\alpha,\beta)$

عملیات جبری روی اعداد ذوزنقه‌ای $\tilde{M}=(a,b,\alpha,\beta)$ و $\tilde{N}=(c,d,\gamma,\delta)$

تصویر $\tilde{M}$	$-\tilde{M}=(-b,-a,\beta,\alpha)$
معکوس $\tilde{M}$	$\tilde{M}^{-1}=\left(\frac{1}{b},\frac{1}{a},\frac{\beta}{b(b+\beta)},\frac{\alpha}{a(a-\alpha)}\right)$
جمع دو عدد فازی	$\tilde{M}+\tilde{N}=(a+c,b+d,\alpha+\gamma,\beta+\delta$
تفریق دو عدد فازی	$\tilde{M}-\tilde{N}=(a-d,b-c,\alpha+\delta,\beta+\gamma$
ضرب دو عدد فازی	$\tilde{M}>0,\tilde{N}>0:\tilde{M}.\tilde{N}=(ac,bd,a\gamma+c\alpha-\alpha\gamma,b\delta+d\beta+\beta\delta$
	$\tilde{M}<0,\tilde{N}>0:\tilde{M}.\tilde{N}=(ad,bc,d\alpha-a\delta+\alpha\delta-b\gamma+c\beta-\beta\gamma$
	$\tilde{M}<0,\tilde{N}<0:\tilde{M}.\tilde{N}=(bd,ac,-b\delta-d\beta-\beta\delta,-a\gamma-c\alpha+\alpha\gamma$
تقسیم دو عدد فازی	$\tilde{M}>0,\tilde{N}>0:\tilde{M}\div\tilde{N}=\left(\frac{a}{d},\frac{b}{c},\frac{a\delta+d\alpha}{d(d+\delta)},\frac{b\gamma+c\beta}{c(c-\gamma)}\right)$
	$\tilde{M}<0,\tilde{N}>0:\tilde{M}\div\tilde{N}=\left(\frac{a}{c},\frac{b}{d},\frac{c\alpha-a\gamma}{c(c-\gamma)},\frac{d\beta-b\delta}{d(d+\delta)}\right)$
	$\tilde{M}<0,\tilde{N}<0:\tilde{M}\div\tilde{N}=\left(\frac{b}{c},\frac{a}{d},\frac{-b\gamma-c\beta}{c(c-\gamma)},\frac{-a\delta-d\alpha}{d(d+\delta)}\right)$



عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{M}=(a,b,\alpha,\beta)$

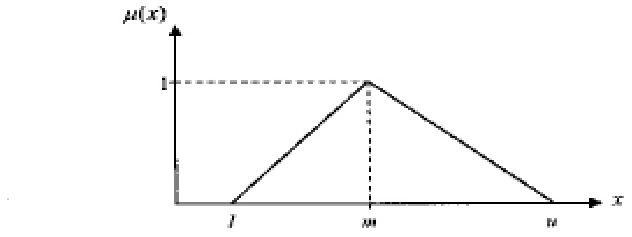
فصل سوم

اعداد فازی

نمایش اعداد فازی

عملیات جبری روی اعداد مثلثی $\widetilde{M}=(l,m,u)$ و $\widetilde{N}=(a,b,c)$

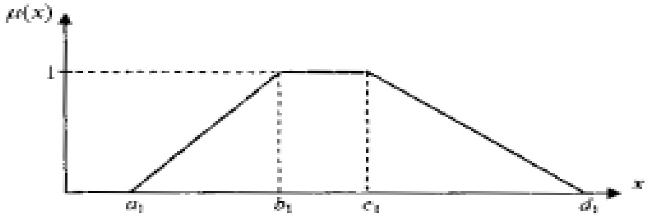
تصویر $\widetilde{M}$	$-\widetilde{M}=(-u,-m,-l)$
معکوس $\widetilde{M}$	$\widetilde{M}^{-1}=\left(\frac{1}{u},\frac{1}{m},\frac{1}{l}\right)$
جمع دو عدد فازی	$\widetilde{M}+\widetilde{N}=(l+a,m+b,u+c)$
تفریق دو عدد فازی	$\widetilde{M}-\widetilde{N}=(l-c,m-b,u-a)$
ضرب دو عدد فازی	$\widetilde{M}>0,\widetilde{N}>0:\widetilde{M}.\widetilde{N}=(la,mb,uc)$
	$\widetilde{M}<0,\widetilde{N}>0:\widetilde{M}.\widetilde{N}=(lc,mb,ua)$
	$\widetilde{M}<0,\widetilde{N}<0:\widetilde{M}.\widetilde{N}=(uc,mb,la)$
ضرب اسکالر	$k\in R^{+}:k.\widetilde{M}=(kl,km,ku)$
	$k\in R^{-}:k.\widetilde{M}=(ku,km,kl)$
تقسیم دو عدد فازی	$\widetilde{M}>0,\widetilde{N}>0:\widetilde{M}\div\widetilde{N}=\left(\frac{l}{c},\frac{m}{b},\frac{u}{a}\right)$
	$\widetilde{M}<0,\widetilde{N}>0:\widetilde{M}\div\widetilde{N}=\left(\frac{u}{c},\frac{m}{b},\frac{l}{a}\right)$
	$\widetilde{M}<0,\widetilde{N}<0:\widetilde{M}\div\widetilde{N}=\left(\frac{u}{a},\frac{m}{b},\frac{l}{c}\right)$



عدد فازی مثلثی $\widetilde{M}=(l,m,n)$

عملیات جبری روی اعداد ذوزنقه‌ای $\widetilde{M}=(a_1,b_1,c_1,d_1)$ و $\widetilde{N}=(a_2,b_2,c_2,d_2)$

تصویر $\widetilde{M}$	$-\widetilde{M}=(-d_1,-c_1,-b_1,-a_1)$
معکوس $\widetilde{M}$	$\widetilde{M}^{-1}=\left(\frac{1}{d_2},\frac{1}{c_2},\frac{1}{b_2},\frac{1}{a_2}\right)$
جمع دو عدد فازی	$\widetilde{M}+\widetilde{N}=(a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2,d_1+d_2)$
تفریق دو عدد فازی	$\widetilde{M}-\widetilde{N}=(a_1-d_2,b_1-c_2,c_1-b_2,d-a_2)$
	$\widetilde{M}>0,\widetilde{N}>0:\widetilde{M}.\widetilde{N}=(a_1a_2,b_1b_2,c_1c_2,d_1d_2)$
ضرب دو عدد فازی	$\widetilde{M}<0,\widetilde{N}>0:\widetilde{M}.\widetilde{N}=(a_2d_1,b_2c_1,c_2b_1,d_2a_1)$
	$\widetilde{M}<0,\widetilde{N}<0:\widetilde{M}.\widetilde{N}=(d_1d_2,c_1c_2,b_1b_2,a_1a_2)$
ضرب اسکالر	$k\in R^{+}:k.\widetilde{M}=(ka_1,kb_1,kc_1,kd_1)$
	$k\in R^{-}:k.\widetilde{M}=(kd_1,kc_1,kb_1,ka_1)$
تقسیم دو عدد فازی	$\widetilde{M}>0,\widetilde{N}>0:\widetilde{M}\div\widetilde{N}=\left(\frac{a_1}{d_2},\frac{b_1}{c_2},\frac{c_1}{b_2},\frac{d_1}{a_2}\right)$
	$\widetilde{M}<0,\widetilde{N}>0:\widetilde{M}\div\widetilde{N}=\left(\frac{d_1}{d_2},\frac{c_1}{c_2},\frac{b_1}{b_2},\frac{a_1}{a_2}\right)$
	$\widetilde{M}<0,\widetilde{N}<0:\widetilde{M}\div\widetilde{N}=\left(\frac{d_1}{a_2},\frac{c_1}{b_2},\frac{b_1}{c_2},\frac{a_1}{d_2}\right)$



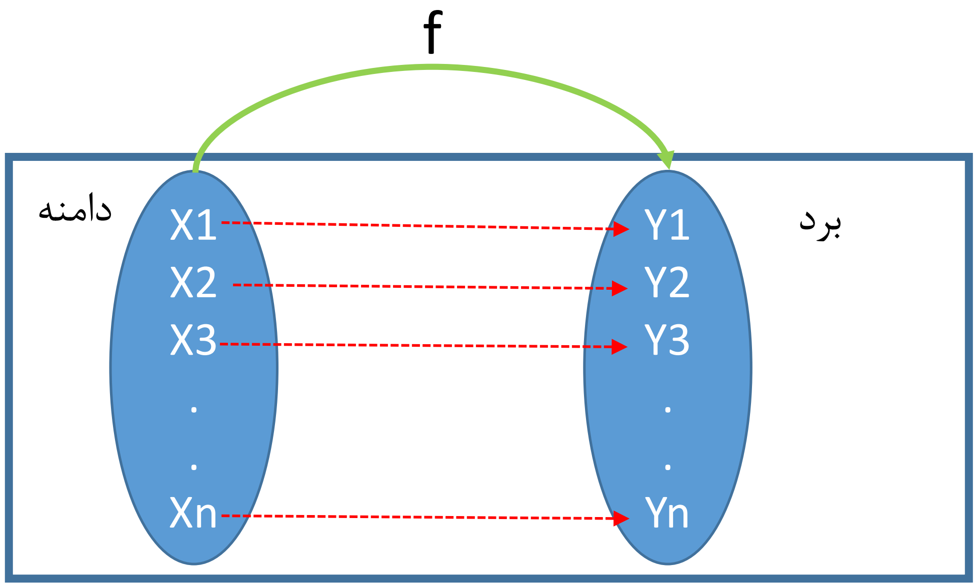
عدد فازی ذوزنقه‌ای $\widetilde{M}=(a_1,b_1,c_1,d_1)$

نکته مهم:

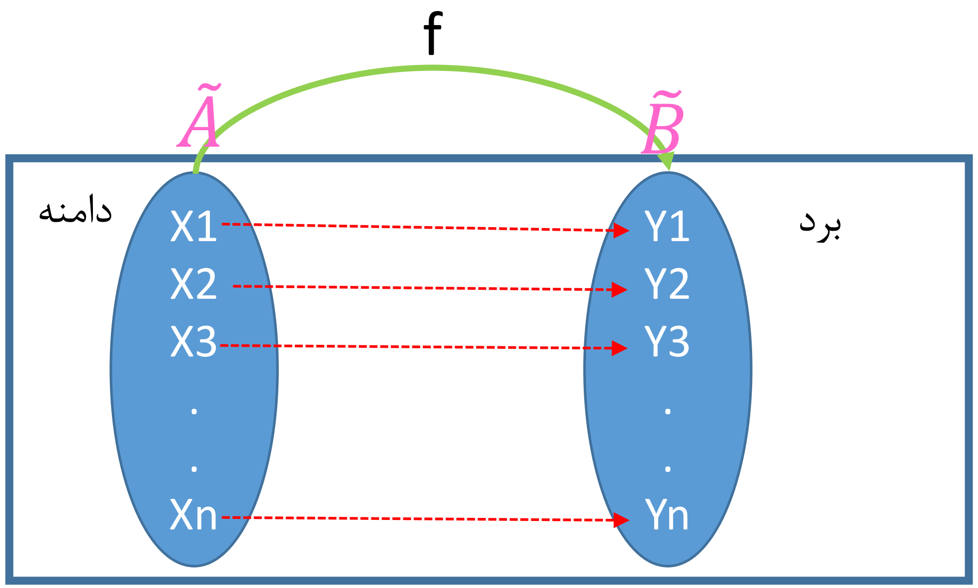
- ✓ عملگرهای مجموعه های فازی از قبیل اجتماع و اشتراک می باشند.
- ✓ مفاهیمی نظیر برش آلفا، اصل تجزیه، اصل توسعه و همچنین عملگرهای ریاضیات نظیر جمع، تفریق، ضرب و تقسیم در اعداد فازی کاربرد دارند.

اصل توسعه، ابزار ریاضی مهمی است که برای توسعه نظریه‌های ریاضیات کلاسیک و عملیات مربوط به محیطهای فازی مورد استفاده قرار می‌گیرد. اصل توسعه، زمینه‌ای را ایجاد می‌نماید که پارامترهای یک تابع در مجموعه‌های فازی قابل محاسبه باشند. این یک اصل بسیار مهم می‌باشد و از آن در موقعیتهای مختلف خصوصاً در ارتباط با روابط فازی (فصل ۴) و حساب فازی استفاده می‌شود.

تابع f با مشخصات زیر را در نظر بگیرید. این تابع عناصر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ از مجموعه مرجع X را به مجموعه مرجع Y نگاشت می‌نماید.



Y1=f(x1)
Y2=f(x2)
Y3=f(x3)
.
.
Yn=f(xn)



حال مجموعه فازی $\tilde{A}$ که بر روی $x_1, x_2, \ldots, x_n$ تعریف شده است را در نظر بگیرید،

مجموعه فازی $\tilde{A}$ بصورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\boxed{\tilde{A} = \{(x_1, \mu_{\tilde{A}}(x_1)), (x_2, \mu_{\tilde{A}}(x_2)), \ldots, (x_n, \mu_{\tilde{A}}(x_n))\}}$$

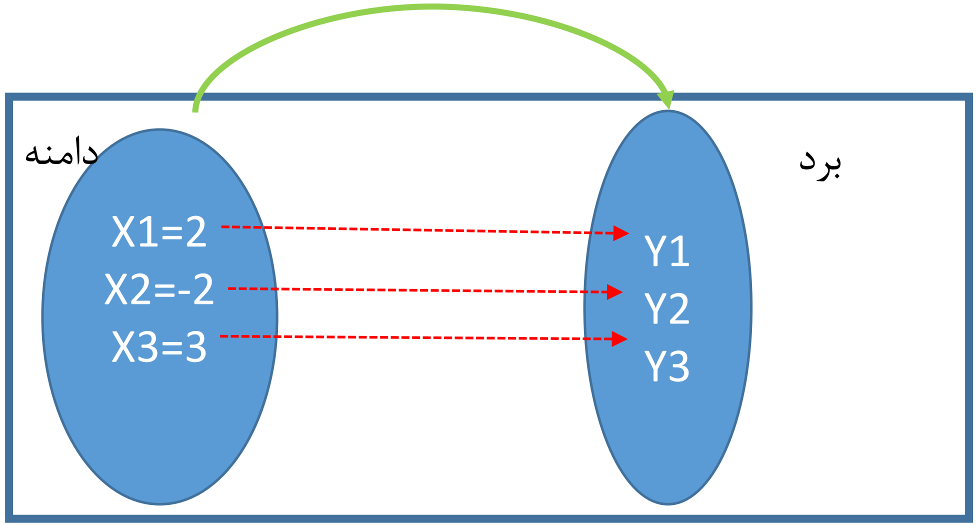
سوالی که پیش می آید این است که اگر ورودی تابع f فازی باشد (بعنوان مثال مجموعه $\tilde{A}$) خروجی به چه شکل خواهد بود؟ آیا خروجی فازی است؟

اصل توسعه تایید می کند که خروجی، مجموعه فازی $\tilde{B}$ می باشد.

یعنی هر تصویری از x_i تحت f (به شکل ریاضی $y_i = f(x_i)$) با درجه $\mu_{\tilde{A}}(x_i)$ فازی می‌شود.

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}) = \{(f(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_1)), (f(x_2), \mu_{\tilde{A}}(x_2)), \ldots, (f(x_n), \mu_{\tilde{A}}(x_n))\}$$

$f=x^2$



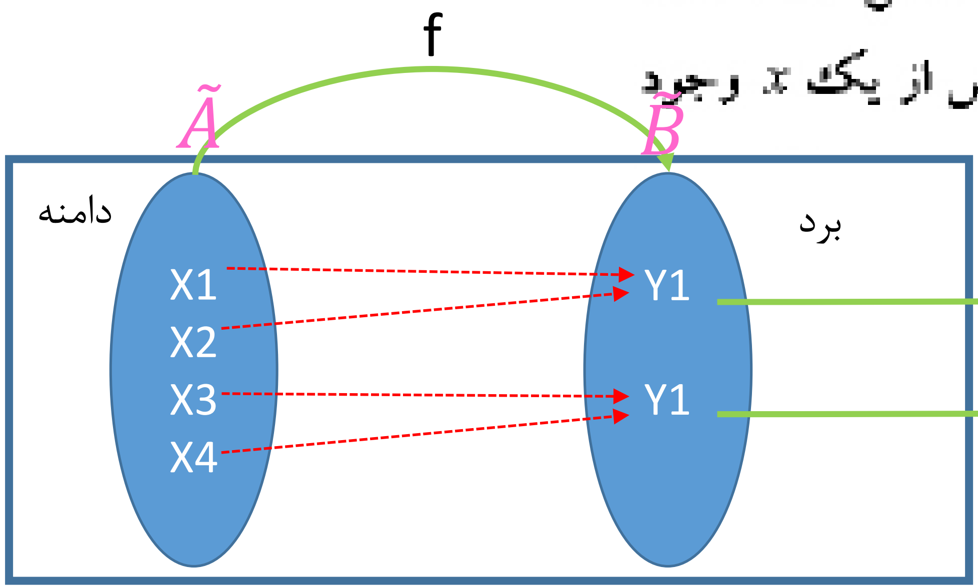
Y1=f(x1)=4
Y2=f(x2)=4
Y3=f(x3)=9

$$\tilde{A} = \{(2,0.5), (-2,0.8), (3,0.6)\}$$

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}) = \{(f(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_1)), (f(x_2), \mu_{\tilde{A}}(x_2)), \ldots, (f(x_n), \mu_{\tilde{A}}(x_n))\}$$

$$\tilde{B} = \{(4,0.5), (4,0.8), (9,0.6)\}$$

از آنجا که توابع در حالت کلی دارای نگاشت چند به یک می‌باشند، ممکن است تعداد زیادی x به یک y نگاشت شوند. بنابراین، برای یک y معین ممکن است بیش از یک x وجود داشته باشد.



درجه عضویت $\alpha^{1} = \min(\mu_{x_1}, \mu_{x_2})$

درجه عضویت $\alpha^{11} = \min(\mu_{x_3}, \mu_{x_4})$

درجه عضویت نهایی Y1

$\mu_{\tilde{B}}(y_1) = \max(\alpha^{1}, \alpha^{11})$

$$\tilde{B} = \{(4,0.5), \boxed{(4,0.8)}, (9,0.6)\}$$

اصل توسعه می گوید که بیشینه مقادیر عضویت این عناصر بعنوان درجه عضویت Y1 در نظر گرفته می شود.
یعنی، اگر در برد یک عنصر با دو درجه عضویت ظاهر شد max آنها را انتخاب کنید.

سوال:

آیا عملگر min و max تنها عملگرهای قابل استفاده در اصل توسعه هستند؟

خیر- از هر t نرم به جای min و s نرم به جای max می توانید استفاده کنید.

فصل سوم

اعداد فازی

اصل تجزیه

اعداد فازی، همانند هر مجموعه فازی ممکن است بوسیله برشهای α مشخص شوند.

نمایش جدولی عدد فازی تقریباً ۳

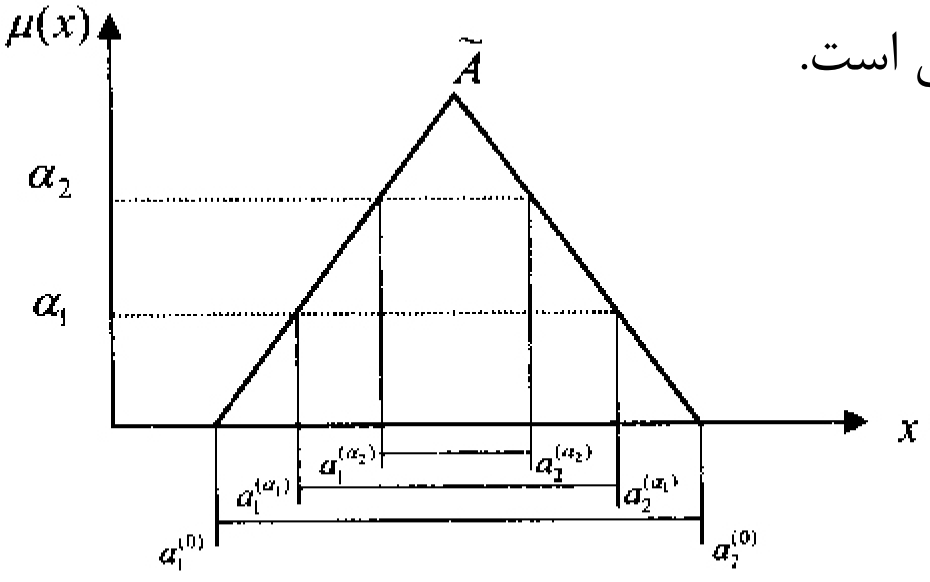
	0.4	0.7	1	0.7	0.4	0.2	0.1	0	0
α=1.0			1						
α=0.9			1						
α=0.8			1						
α=0.7		1	1	1					
α=0.6		1	1	1					
α=0.5		1	1	1					
α=0.4	1	1	1	1	1				
α=0.3	1	1	1	1	1				
α=0.2	1	1	1	1	1	1			
α=0.1	1	1	1	1	1	1	1		
α=0.0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

پارامتری‌کردن شکل یک عدد فازی بوسیله α، راه مناسبی برای انجام محاسبات با اعداد فازی می‌باشد. این کار، عملیات ریاضیات فازی را به عملیات حساب فاصله‌ای تبدیل می‌نماید.

عدد فازی $\tilde{A}$ را در نظر بگیرید.

تابع عضویت $\tilde{A}$ بوسیله پارامتر α به صورت پارامتری نشان داده شده است.

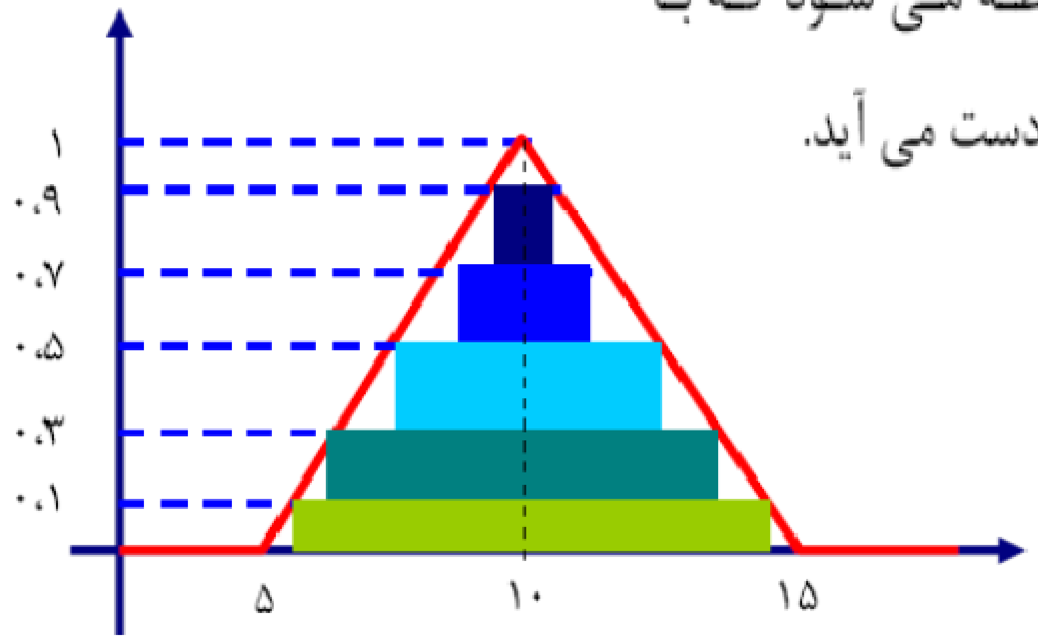
با هر α یک فاصله $A_\alpha = \left[a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}\right]$ مشخص می شود که قطعی است.



فواصل تودرتو(آشیانه‌ای) مربوط به عدد فازی $\tilde{A}$

تاکید بر محدب بودن تابع عضویت یک عدد فازی دارد.
به عبارت دیگر، هنگامیکه $\alpha_1 < \alpha_2$ باشد،
$\left[a_1^{(\alpha_2)}, a_2^{(\alpha_2)}\right] \subset \left[a_1^{(\alpha_1)}, a_2^{(\alpha_1)}\right]$

مثال مجموعه فازی $\tilde{A}$ در بازه $[5,15]$ و به صورت ذیل تعریف می شود. مقادیر مختلفی جهت برش در بازه $[0,1]$ انتخاب شده اند که برابر ۰/۱، ۰/۳، ۰/۵، ۰/۷، ۰/۹ می باشند. برش های تعریف شده در شکل زیر به تصویر کشیده شده است. ملاحظه می شود که با اجتماع مجموعه های فازی حاصل از هر برش ($\tilde{A}_\alpha$)، مجموعه فازی $\tilde{A}$ به دست می آید.



$$\tilde{A} = \bigvee_{0 \le \alpha \le 1} \alpha . A_\alpha = \bigvee_{0 \le \alpha \le 1} \alpha . \left[a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}\right]$$

مجموعه نمایش فاصله ای عدد فازی $\tilde{A}$
$\left[a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}\right]$

جمع اعداد فازی

از مجموع دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ عدد فازی جدید $\tilde{C} = \tilde{A} + \tilde{B}$ حاصل می‌شود که تابع عضویت آن بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{\mu_{\tilde{C}}(z) = \mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(z)}$$

طوریکه z از جمع اعداد قطعی x و y که عضوهای مجموعه‌های مرجع $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ هستند بوجود می‌آید.

۱. جمع $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ ممکن است برحسب جمع برشهای α دو عدد بصورت زیر تعریف شود:

$$\tilde{A} + \tilde{B} = \left[a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}\right] + \left[b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}\right]$$

$$\tilde{A} + \tilde{B} = \left[a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)}\right]$$

۲. روش دیگر تعریف جمع اعداد فازی، با استفاده از اصل توسعه بدست می‌آید.

مطابق با اصل توسعه، جمع دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ که بر روی x و y تعریف شده‌اند بصورت $\tilde{C}$ نشان داده می‌شود و تابع عضویت آن به شکل زیر می‌باشد:

اجتماع

$$\boxed{\mu_{\tilde{C}}(z) = \bigvee_{z=x+y} \left[\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y)\right]}$$

اشتراک

رابطه فوق نشان می‌دهد که درجه عضویت عدد قطعی z در عدد فازی $\tilde{C}$، از بیشینه نمودن کمینه درجات عضویت همه زوجهای x و y که جمع آنها z می‌شود بدست می‌آید.

جمع اعداد فازی گسسته:

$$\tilde{A} = \tilde{3} = \{(1,0.3),(2,0.7),(3,1.0),(4,0.7),(5,0.3)\}$$

$$\tilde{B} = \tilde{7} = \{(5,0.2),(6,0.6),(7,1.0),(8,0.6),(9,0.2)\}$$

$$\tilde{C} = \tilde{A} + \tilde{B}$$

۱. جمع $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ ممکن است برحسب جمع برشهای α دو عدد بصورت زیر تعریف شود:

$$\tilde{A} + \tilde{B} = \left[a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}\right] + \left[b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}\right]$$

$\tilde{A} = \tilde{3} = \{(1,0.3),(2,0.7),(3,1.0),(4,0.7),(5,0.3)\}$

$\tilde{B} = \tilde{7} = \{(5,0.2),(6,0.6),(7,1.0),(8,0.6),(9,0.2)\}$

جمع اعداد فازی گسسته:

	0.3	0.7	1	0.7	0.3	0	0	0	0
$\alpha=1.0$			1						
$\alpha=0.9$			1						
$\alpha=0.8$			1						
$\alpha=0.7$		1	1	1					
$\alpha=0.6$		1	1	1					
$\alpha=0.5$		1	1	1					
$\alpha=0.4$		1	1	1					
$\alpha=0.3$	1	1	1	1	1				
$\alpha=0.2$	1	1	1	1	1				
$\alpha=0.1$	1	1	1	1	1				
$\alpha=0.0$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$+$

	0	0	0	0	0.2	0.6	1.0	0.6	0.2	0	0
$\alpha=1.0$							1				
$\alpha=0.9$							1				
$\alpha=0.8$							1				
$\alpha=0.7$							1				
$\alpha=0.6$						1	1	1			
$\alpha=0.5$						1	1	1			
$\alpha=0.4$						1	1	1			
$\alpha=0.3$						1	1	1			
$\alpha=0.2$					1	1	1	1	1		
$\alpha=0.1$					1	1	1	1	1		
$\alpha=0.0$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

$= \tilde{C}$

$$A_{0.4} = \left[a_1^{(0.4)}, a_2^{(0.4)}\right] = [2,4]$$

$$B_{0.4} = \left[b_1^{(0.4)}, b_2^{(0.4)}\right] = [6,8]$$

جمع اعداد فازی $\tilde{3}$ و $\tilde{7}$

	0	0	0	0	0	0.2	0.3	0.6	0.7	1.0	0.7	0.6	0.3	0.2	0	0
α=1.0										1						
α=0.9										1						
α=0.8										1						
α=0.7									1	1	1					
α=0.6								1	1	1	1	1				
α=0.5								1	1	1	1	1				
α=0.4								1	1	1	1	1				
α=0.3							1	1	1	1	1	1	1			
α=0.2						1	1	1	1	1	1	1	1	1		
α=0.1						1	1	1	1	1	1	1	1	1		
α=0.0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

$$A_{0.4}=\left[a_1^{(0.4)},a_2^{(0.4)}\right]=[2,4]$$

$$B_{0.4}=\left[b_1^{(0.4)},b_2^{(0.4)}\right]=[6,8]$$

$$C_{0.4}=\left[a_1^{(0.4)},\ a_2^{(0.4)}\right]+\left[b_1^{(0.4)},\ b_2^{(0.4)}\right]=\left[a_1^{(0.4)}+b_1^{(0.4)},\ a_2^{(0.4)}+b_2^{(0.4)}\right]=[8,\ 12]$$

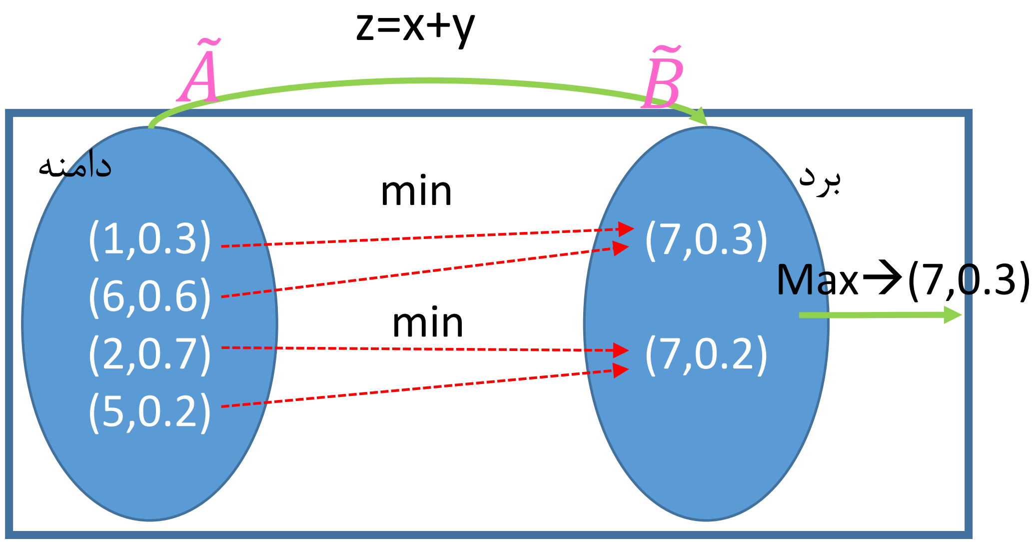
مطابق آنچه در جدول دیده می‌شود، عدد فازی جدید در نقطه ۱۰ درجه عضویتی برابر ۱ را (در مجموعه مرجع پایین جدول) دارا می‌باشد و بنابراین، آن را بعنوان عدد فازی تقریباً ۱۰ در نظر می‌گیریم.

فصل سوم

اعداد فازی

جمع اعداد فازی

جمع اعداد فازی با استفاده از اصل توسعه:



$$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(z) = \bigvee_{z=x+y} \left[\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y)\right]$$

$$\tilde{A} = \tilde{3} = \{(1,0.3),(2,0.7),(3,1.0),(4,0.7),(5,0.3)\}$$

$$\tilde{B} = \tilde{7} = \{(5,0.2),(6,0.6),(7,1.0),(8,0.6),(9,0.2)\}$$

اشتراک
min

$$\tilde{C} = \tilde{A} + \tilde{B} = \left\{ \begin{array}{c} (6,0.2), (7,0.3), (8,0.3), (9,0.3), (10,0.2), \\ (7,0.2), (8,0.6), (9,0.7), (10,0.6), (11,0.2), \\ (8,0.2), (9,0.6), (10,1), (11,0.6), (12,0.2), \\ (9,0.2), (10,0.6), (11,0.7), (12,0.6), (13,0.2), \\ (10,0.2), (11,0.3), (12,0.3), (13,0.3), (14,0.2) \end{array} \right\}$$

max

$$\left\{ \begin{array}{c} (6,0.2), (7,0.3), (8,0.6), (9,0.7), \boxed{(10,1)}, \\ (11,0.7), (12,0.6), (13,0.3), (14,0.2) \end{array} \right\}$$

تفریق اعداد فازی

۱. با استفاده از برش α

$$\tilde{A}-\tilde{B}=\left[a_1^{(\alpha)},a_2^{(\alpha)}\right]-\left[b_1^{(\alpha)},b_2^{(\alpha)}\right] \longrightarrow \tilde{A}-\tilde{B}=\left[a_1^{(\alpha)}-b_2^{(\alpha)},\ a_2^{(\alpha)}-b_1^{(\alpha)}\right]$$

۲. از طریق اصل توسعه

اجتماع

$$\mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}(z)=\bigvee_{z=x-y}\left[\mu_{\tilde{A}}(x)\wedge\mu_{\tilde{B}}(y)\right]$$

اشتراک

$$\tilde{A} = \tilde{3} = \{(1,0.3),(2,0.7),(3,1.0),(4,0.7),(5,0.3)\}$$

$$\tilde{B} = \tilde{7} = \{(5,0.2),(6,0.6),(7,1.0),(8,0.6),(9,0.2)\}$$

۱. با استفاده از برش α

$$\tilde{C} = \tilde{B} - \tilde{A}$$

	0	0	0	0	0.2	0.6	1.0	0.6	0.2	0	0
α=1.0							1				
α=0.9							1				
α=0.8							1				
α=0.7							1				
α=0.6						1	1	1			
α=0.5						1	1	1			
α=0.4						[redacted]	[redacted]	[redacted]			
α=0.3						1	1	1			
α=0.2					1	1	1	1	1		
α=0.1					1	1	1	1	1		
α=0.0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

$-$

	0.3	0.7	1	0.7	0.3	0	0	0	0
α=1.0			1						
α=0.9			1						
α=0.8			1						
α=0.7		1	1	1					
α=0.6		1	1	1					
α=0.5		1	1	1					
α=0.4		[redacted]	[redacted]	[redacted]					
α=0.3	1	1	1	1	1				
α=0.2	1	1	1	1	1				
α=0.1	1	1	1	1	1				
α=0.0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$= \tilde{C}$

$$A_{0.3} = \left[a_1^{(0.3)}, a_2^{(0.3)}\right] = [1,5]$$

$$B_{0.3} = \left[b_1^{(0.3)}, b_2^{(0.3)}\right] = [6,8]$$

$$A_{0.3}=\left[a_1^{(0.3)},a_2^{(0.3)}\right]=[1,5]$$

$$B_{0.3}=\left[b_1^{(0.3)},b_2^{(0.3)}\right]=[6,8]$$

$$C_{0.3}=\left[b_1^{(0.3)},b_2^{(0.3)}\right]-\left[a_1^{(0.3)},a_2^{(0.3)}\right]=\left[b_1^{(0.3)}-a_2^{(0.3)},b_2^{(0.3)}-a_1^{(0.3)}\right]=[6-5,8-1]=[1,7]$$

تفاضل اعداد فازی $\tilde{3}$ و $\tilde{7}$

	0.2	0.3	0.6	0.7	1	0.7	0.6	0.3	0.2	0
α=1.0					1					
α=0.9					1					
α=0.8					1					
α=0.7				1	1	1				
α=0.6			1	1	1	1	1			
α=0.5			1	1	1	1	1			
α=0.4			1	1	1	1	1			
α=0.3		1	1	1	1	1	1	1		
α=0.2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
α=0.1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
α=0.0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

همانگونه که در این جدول مشهود است $\tilde{C}$ را می‌توان برابر با عدد فازی $\tilde{4}$ در نظر گرفت.

۲. از طریق اصل توسعه

$$\mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}(z) = \bigvee_{z=x-y}\left[\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y)\right]$$

$$\tilde{A} = \tilde{3} = \{(1,0.3),(2,0.7),(3,1.0),(4,0.7),(5,0.3)\}$$

$$\tilde{B} = \tilde{7} = \{(5,0.2),(6,0.6),(7,1.0),(8,0.6),(9,0.2)\}$$

اشتراک
min

$$\tilde{C} = \tilde{B} - \tilde{A} = \left\{\begin{matrix} (4,0.2), (3,0.2), (2,0.2), (1,0.2), (0,0.2), \\ (5,0.3), (4,0.6), (3,0.6), (2,0.6), (1,0.3), \\ (6,0.3), (5,0.7), (4,1), (3,0.7), (2,0.3), \\ (7,0.3), (6,0.6), (5,0.6), (4,0.6), (3,0.3), \\ (8,0.2), (7,0.2), (6,0.2), (5,0.2), (4,0.2) \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\max} \left\{\begin{matrix} \boxed{(4,1),} (3,0.7), (2,0.6), (1,0.3), (5,0.7), \\ (6,0.6), (7,0.3), (8,0.2) \end{matrix}\right\}$$

تفاضل اعداد فازی با توابع عضویت پیوسته:

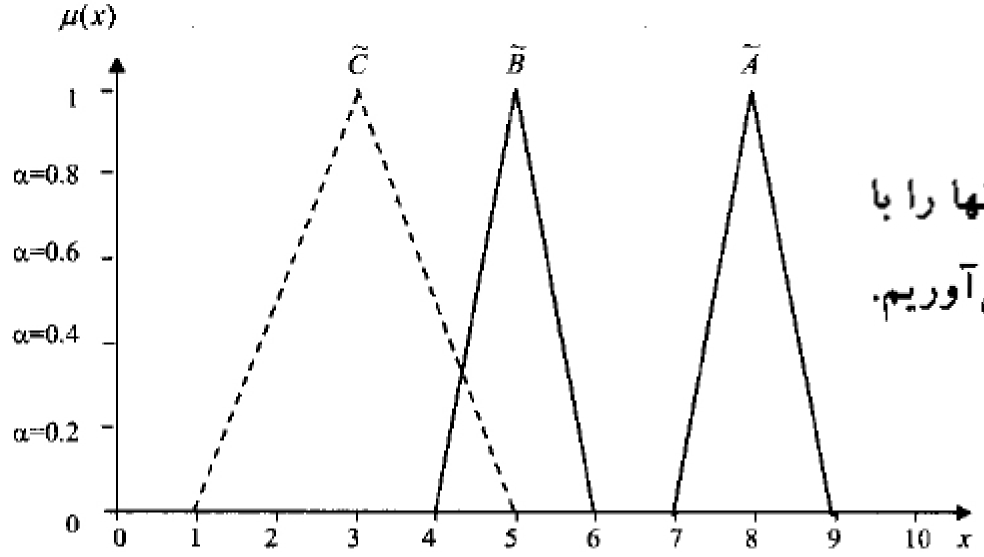
دو عدد فازی مثلثی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را در نظر بگیرید.

$$\tilde{C} = \tilde{A} - \tilde{B}$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x-7 & ;7 \le x \le 8 \\ -x+9 & ;8 \le x \le 9 \\ 0 & ;otherwise \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} x-4 & ;4 \le x \le 5 \\ -x+6 & ;5 \le x \le 6 \\ 0 & ;otherwise \end{cases}$$

هنگامیکه توابع عضویت پیوسته می‌باشند، تفاضل آنها را با پارامتری کردن توابع عضویتشان بوسیله α و تفاضل برشهای α مربوط به آنها بدست می‌آوریم.



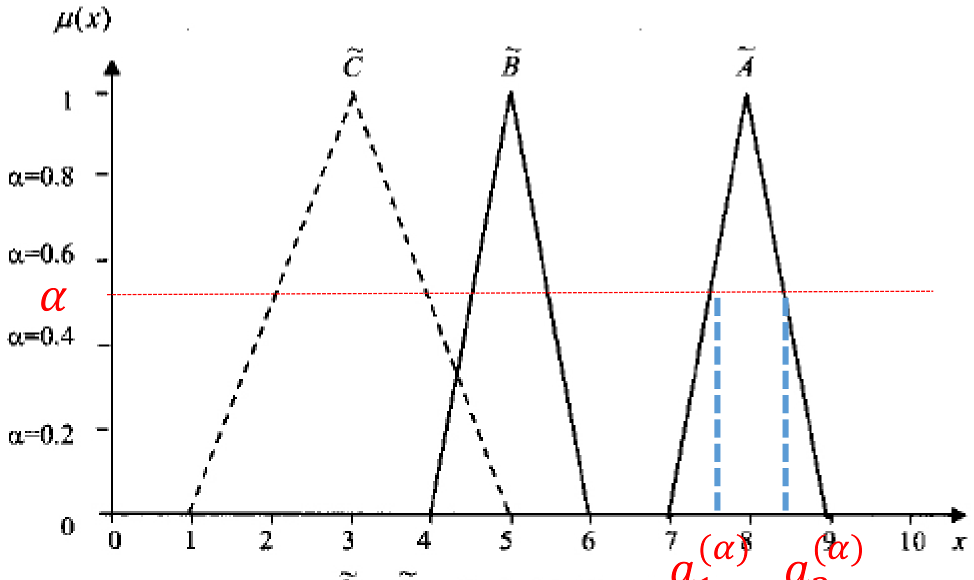
تفاضل اعداد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$

تفریق اعداد فازی

برای ساده‌نمودن موضوع، طرفهای چپ و راست هر تابع عضویت را بصورت جداگانه در نظر بگیرید.

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} x-7 & ;7\le x\le 8\\ -x+9 & ;8\le x\le 9\\ 0 & ;otherwise\end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases} x-4 & ;4\le x\le 5\\ -x+6 & ;5\le x\le 6\\ 0 & ;otherwise\end{cases}$$



تفاضل اعداد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$

$$\mu_{\tilde{A}}^{L}(x) = x - 7$$

حال این دو معادله را بر حسب α می نویسیم.

$$\mu_{\tilde{A}}^{R}(x) = -x + 9$$

$$\alpha = a_1^{(\alpha)} - 7 \Rightarrow a_1^{(\alpha)} = \alpha + 7$$

$$\boxed{\tilde{A} = \left[a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}\right] = \left[\alpha + 7, -\alpha + 9\right]}$$

$$\alpha = -a_2^{(\alpha)} + 9 \Rightarrow a_2^{(\alpha)} = -\alpha + 9$$

توجه داریم که مقدار α برابر با مقدار تابع عضویت در نقطه انتهایی چپ برش α بر روی مجموعه مرجع آن می‌باشد و $a_1^{(\alpha)}$ مقدار x در آن نقطه است.

تابع عضویت عدد $\tilde{B}$ برحسب α با روش مشابهی پارامتری می گردد.

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} x-7 & ;7\le x\le 8 \\ -x+9 & ;8\le x\le 9 \\ 0 & ;otherwise \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases} x-4 & ;4\le x\le 5 \\ -x+6 & ;5\le x\le 6 \\ 0 & ;otherwise \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}^{L}(x) = x-4$$

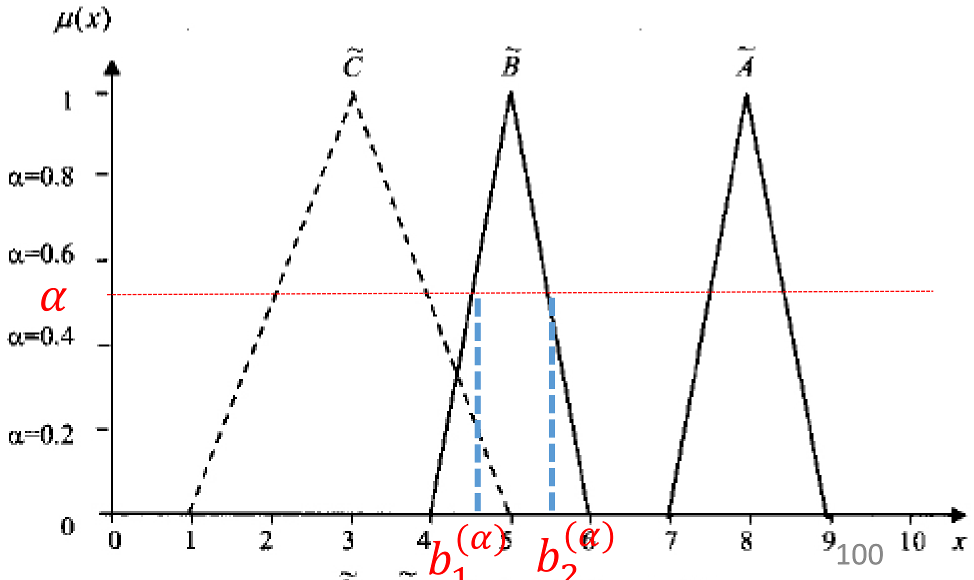
حال این دو معادله را بر حسب α می نویسیم.

$$\mu_{\tilde{B}}^{R}(x) = -x+6$$

$$\alpha = b_1^{(\alpha)} - 4 \Rightarrow b_1^{(\alpha)} = \alpha + 4$$

$$\alpha = -b_2^{(\alpha)} + 6 \Rightarrow b_2^{(\alpha)} = -\alpha + 6$$

$$\boxed{\tilde{B} = \left[b_1^{(\alpha)},\ b_2^{(\alpha)}\right] = \left[\alpha+4, -\alpha+6\right]}$$



تفاضل اعداد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$

$$\tilde{A} = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] = [\alpha + 7, -\alpha + 9]$$

$$\tilde{B} = [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] = [\alpha + 4, -\alpha + 6]$$

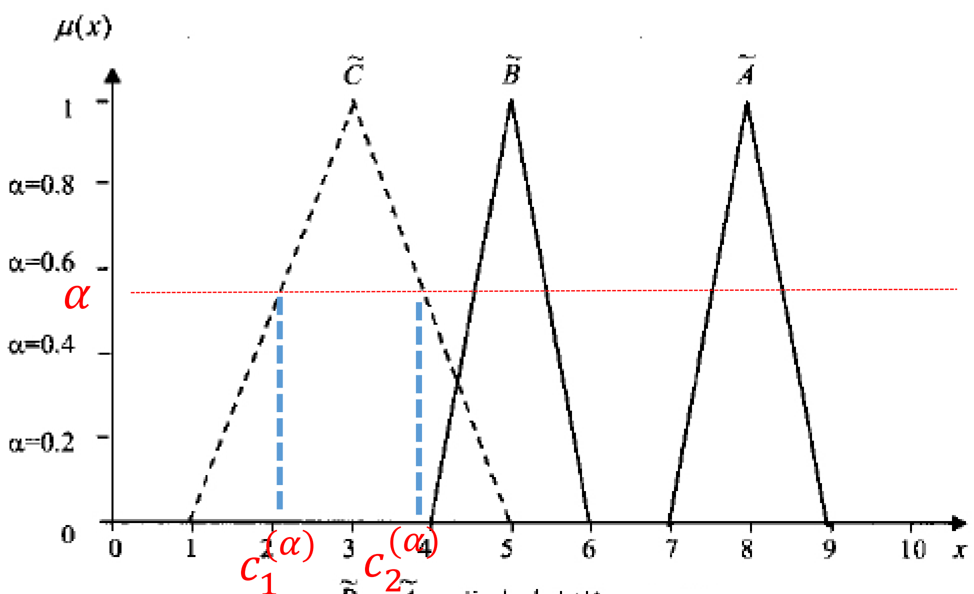
تفاضل $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را بوسیله تفریق نظیر به نظیر فواصل در هر α بدست می‌آوریم.

$$\tilde{C} = \tilde{A} - \tilde{B} = [a_1^{(\alpha)} - b_2^{(\alpha)},\ a_2^{(\alpha)} - b_1^{(\alpha)}] = [(\alpha + 7) - (-\alpha + 6),\ (-\alpha + 9) - (\alpha + 4)]$$
$$= [2\alpha + 1,\ -2\alpha + 5]$$

$$\tilde{C} = [c_1^{(\alpha)}, c_2^{(\alpha)}] = [2\alpha + 1, -2\alpha + 5]$$

برای بیان عدد فازی

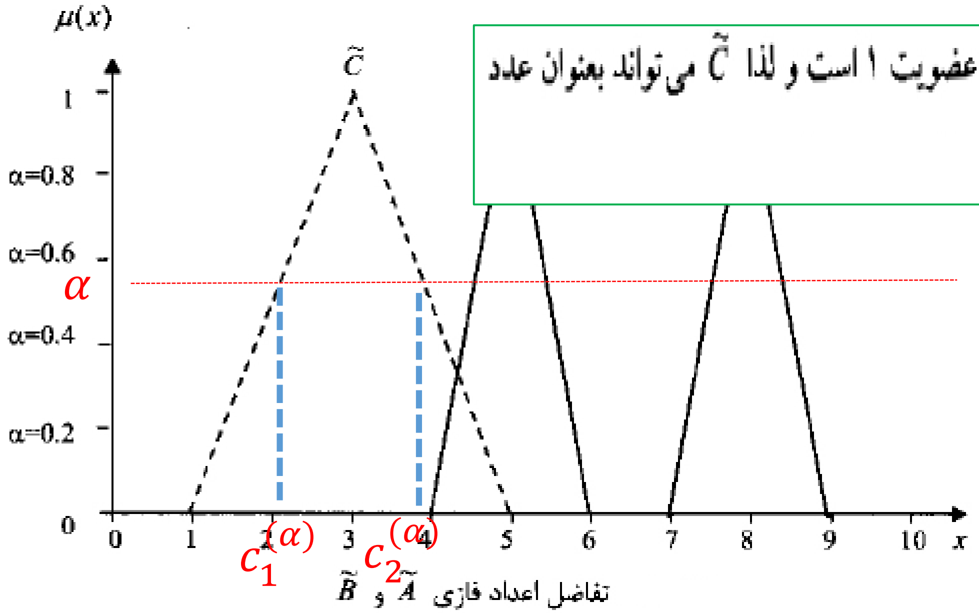
برحسب تابع عضویت، روابط را برای سمتهای چپ و راست $\tilde{C}$ بدست می‌آوریم.



تفاضل اعداد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$

$$C_1^{(\alpha)} = 2\alpha + 1 \xrightarrow{C_1^{(\alpha)} = x \qquad \alpha = \mu_{\tilde{C}}^{L}(x)} x = 2\mu_{\tilde{C}}^{L}(x) + 1 \Rightarrow \mu_{\tilde{C}}^{L}(x) = \frac{1}{2}(x-1)$$

$$C_2^{(\alpha)} = -2\alpha + 5 \xrightarrow{C_2^{(\alpha)} = x \qquad \alpha = \mu_{\tilde{C}}^{R}(x)} x = -2\mu_{\tilde{C}}^{R}(x) + 5 \Rightarrow \mu_{\tilde{C}}^{R}(x) = -\frac{1}{2}(x-5)$$



توجه کنید که عدد قطعی ۳ در $\tilde{C}$ دارای درجه عضویت ۱ است و لذا $\tilde{C}$ می‌تواند بعنوان عدد فازی تقریباً ۳ در نظر گرفته شود

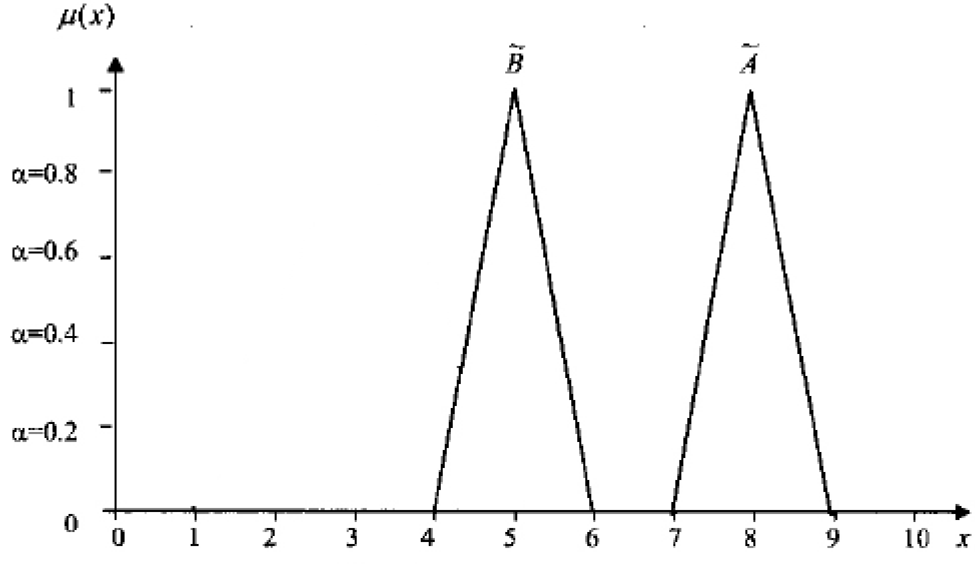
$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1) & ;1 \le x \le 3 \\ -\frac{1}{2}(x-5) & ;3 \le x \le 5 \\ 0 & ;x \ge 5 \end{cases}$$

تمرین: برای مثال قبل مجموع دو عدد فازی مثلثی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را بدست بیاورید.

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} x-7 & ;7\le x\le 8\\ -x+9 & ;8\le x\le 9\\ 0 & ;otherwise\end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases} x-4 & ;4\le x\le 5\\ -x+6 & ;5\le x\le 6\\ 0 & ;otherwise\end{cases}$$

$$\tilde{C}=\tilde{A}+\tilde{B}=?$$



یک شرکت ساختمانی زمینهایی با مساحت ۱۵۰، ۲۰۰، ۲۸۰، ۳۵۰، ۷۵۰، ۱۲۰۰ متر مربع دارد. می‌خواهد از بین آنها یک زمین مناسب برای آپارتمان ۸ واحدی انتخاب کند، بطوریکه آن زمین بزرگ هم باشد. اگر مجموعه‌های فازی مربوط بصورت زیر باشد انتخاب بهینه کدام است.

زمینهای بزرگ $$\widetilde{L} = \frac{0}{150} + \frac{0.1}{200} + \frac{0.3}{280} + \frac{0.6}{350} + \frac{0.8}{500} + \frac{1}{750} + \frac{1}{1200}$$

زمینهای مناسب $$\widetilde{S} = \frac{0.8}{150} + \frac{1}{200} + \frac{1}{280} + \frac{0.7}{350} + \frac{0.3}{500} + \frac{0}{750} + \frac{0}{1200}$$

آپارتمان

ضرب اعداد فازی

۱. با استفاده از برش α

$$\tilde{A}.\tilde{B}=\left[a_1^{(\alpha)},a_2^{(\alpha)}\right].\left[b_1^{(\alpha)},b_2^{(\alpha)}\right] \longrightarrow \tilde{A}.\tilde{B}=\left[a_1^{(\alpha)}.b_1^{(\alpha)},a_2^{(\alpha)}.b_2^{(\alpha)}\right]$$

۲. از طریق اصل توسعه

اجتماع

$$\mu_{\tilde{A}.\tilde{B}}(z)=\bigvee_{z=x\cdot y}\left[\mu_{\tilde{A}}(x)\wedge\mu_{\tilde{B}}(y)\right]$$

اشتراک

یک مورد خاص ضرب فازی، ضرب

یک عدد قطعی در یک عدد فازی می‌باشد. k را بعنوان یک عدد حقیقی مثبت قطعی و $\tilde{A}$ را یک عدد فازی که بر روی مجموعه مرجع اعداد حقیقی مثبت تعریف شده است در نظر بگیرید.

$$k.\tilde{A} = [k, k].\left[a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}\right] = \left[ka_1^{(\alpha)}, ka_2^{(\alpha)}\right]$$

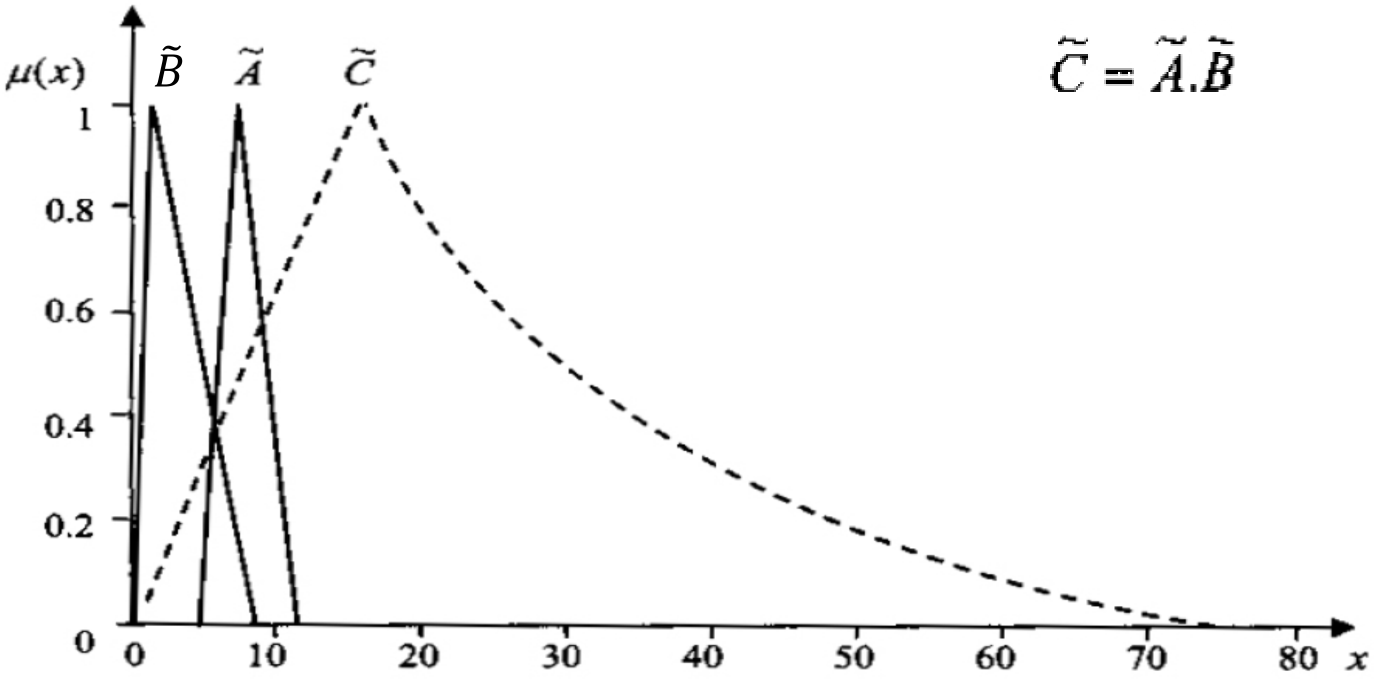
مثال:

دو عدد فازی مثلثی $\tilde{A} = \tilde{8}$ و $\tilde{B} = \tilde{2}$ را در نظر بگیرید.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x - 1 & ;4 \le x \le 8 \\ -\frac{1}{4}x + 3 & ;8 \le x \le 12 \\ 0 & ;othervise \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & ;0 \le x \le 2 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2} & ;2 \le x \le 6 \\ 0 & ;othervise \end{cases}$$

$\tilde{C} = \tilde{A}.\tilde{B}$



ضرب اعداد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$

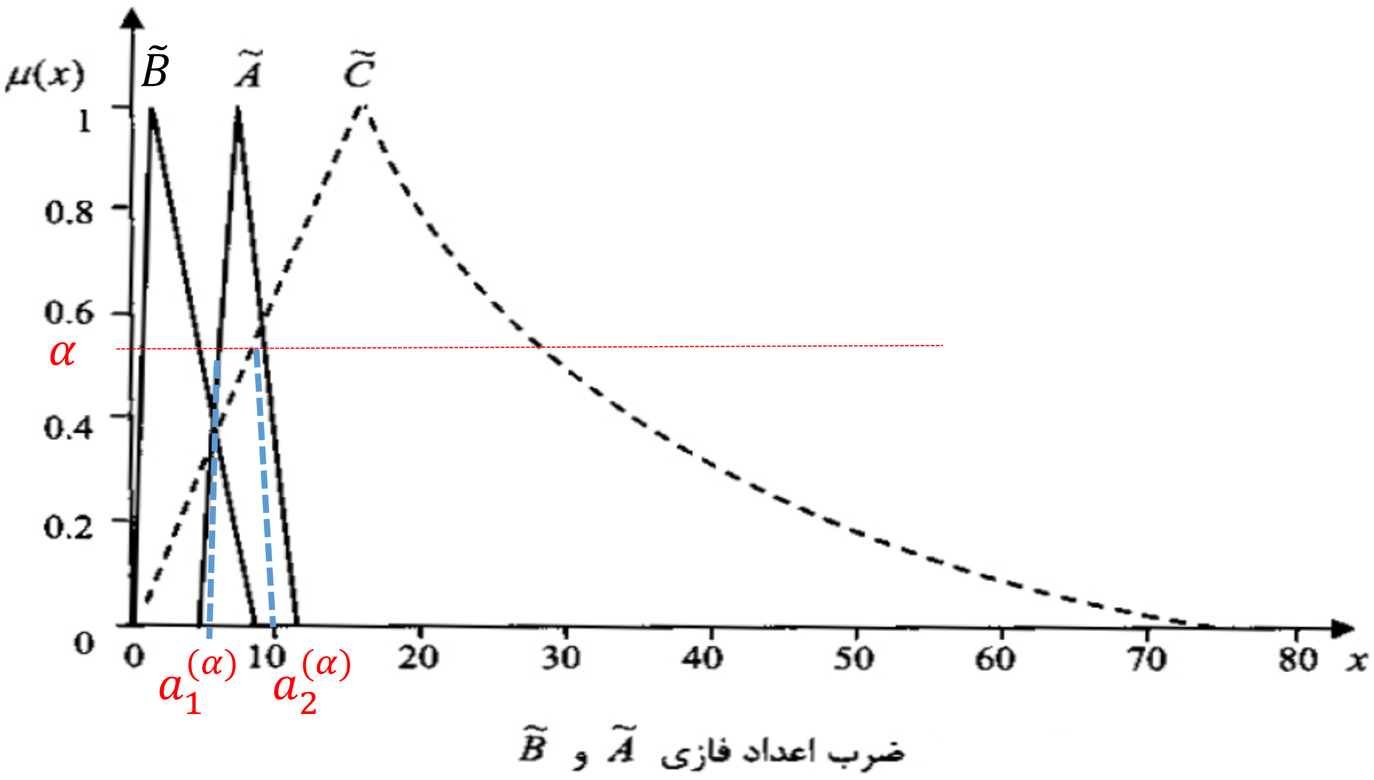
ابتدا توابع عضویت را در روابط فوق برحسب α پارامتری می‌نماییم.

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x-1 & ;4\le x\le 8\\ -\frac{1}{4}x+3 & ;8\le x\le 12\\ 0 & ;otherwise\end{cases}$$

$$\alpha=\frac{1}{4}a_1^{(\alpha)}-1\Rightarrow a_1^{(\alpha)}=4(\alpha+1)$$

$$\alpha=-\frac{1}{4}a_2^{(\alpha)}+3\Rightarrow a_2^{(\alpha)}=-4(\alpha-3)$$

$$\tilde{A}=\left[a_1^{(\alpha)},a_2^{(\alpha)}\right]=\left[4(\alpha+1),-4(\alpha-3)\right]$$

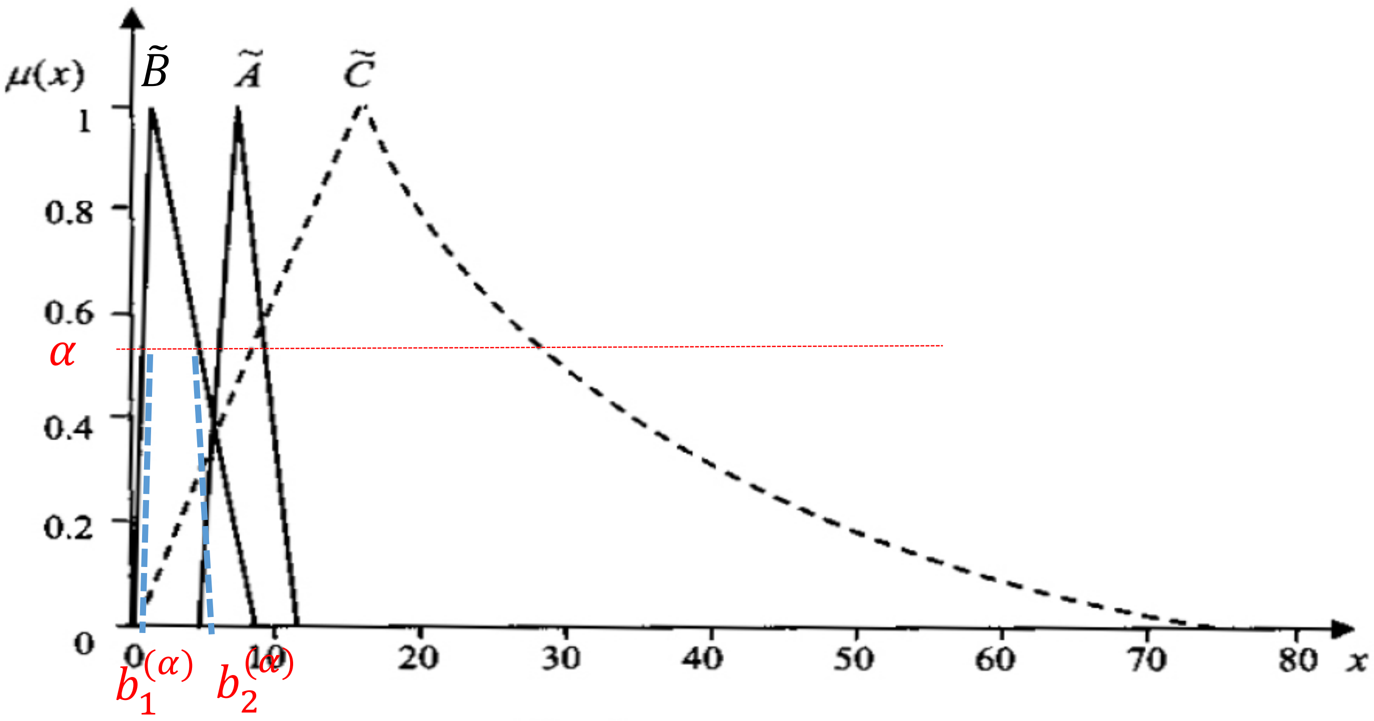


$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & ;0\le x\le 2\\ -\frac{1}{4}x+\frac{3}{2} & ;2\le x\le 6\\ 0 & ;othervise\end{cases}$$

$$\alpha=\frac{1}{2}b_1^{(\alpha)}\Rightarrow b_1^{(\alpha)}=2\alpha$$

$$\alpha=-\frac{1}{4}b_2^{(\alpha)}+\frac{3}{2}\Rightarrow b_2^{(\alpha)}=-4(\alpha-\frac{3}{2})$$

$$\tilde{B}=\left[b_1^{(\alpha)},b_2^{(\alpha)}\right]=\left[2\alpha,-4(\alpha-\frac{3}{2})\right]$$

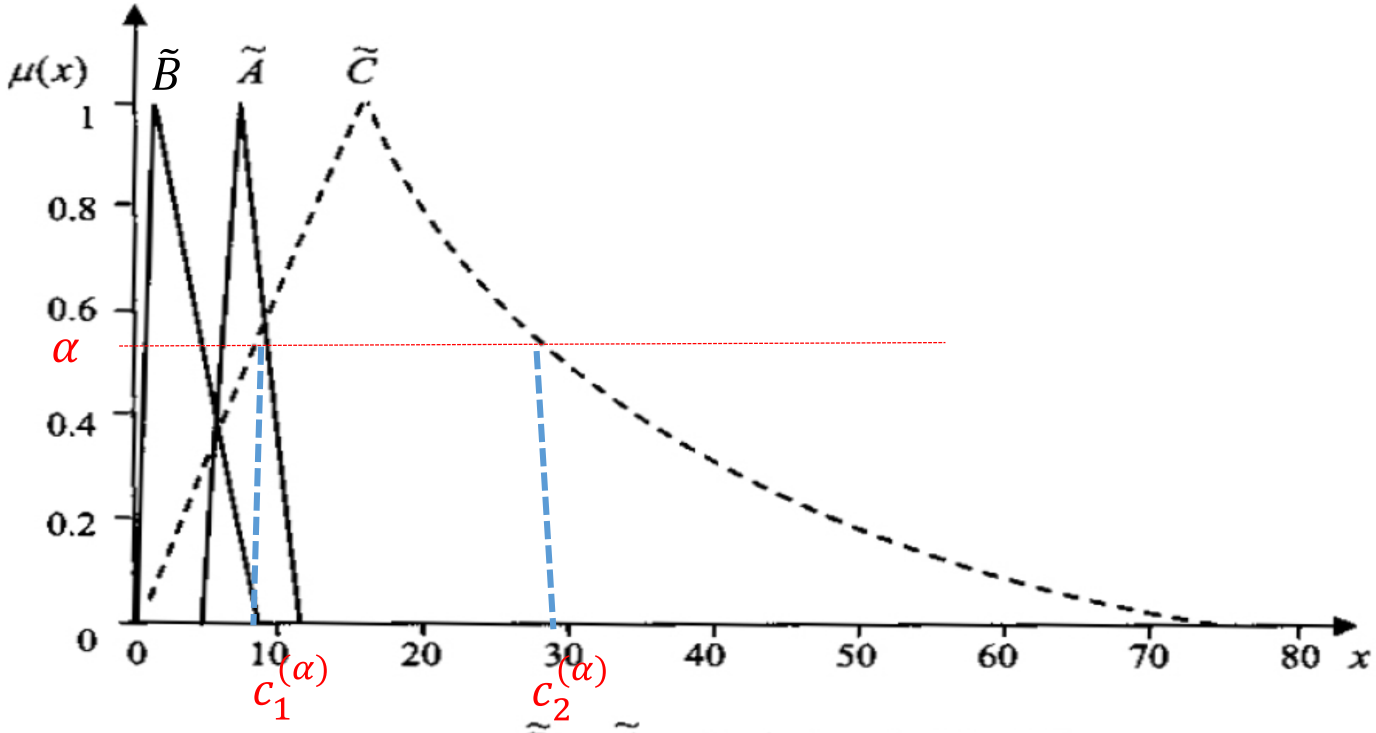


ضرب اعداد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$

ضرب اعداد فازی

$$\tilde{B} = [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] = \left[2\alpha, -4(\alpha - \frac{3}{2})\right]$$

$$\tilde{C} = [c_1^{(\alpha)}, c_2^{(\alpha)}]$$



ضرب اعداد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$

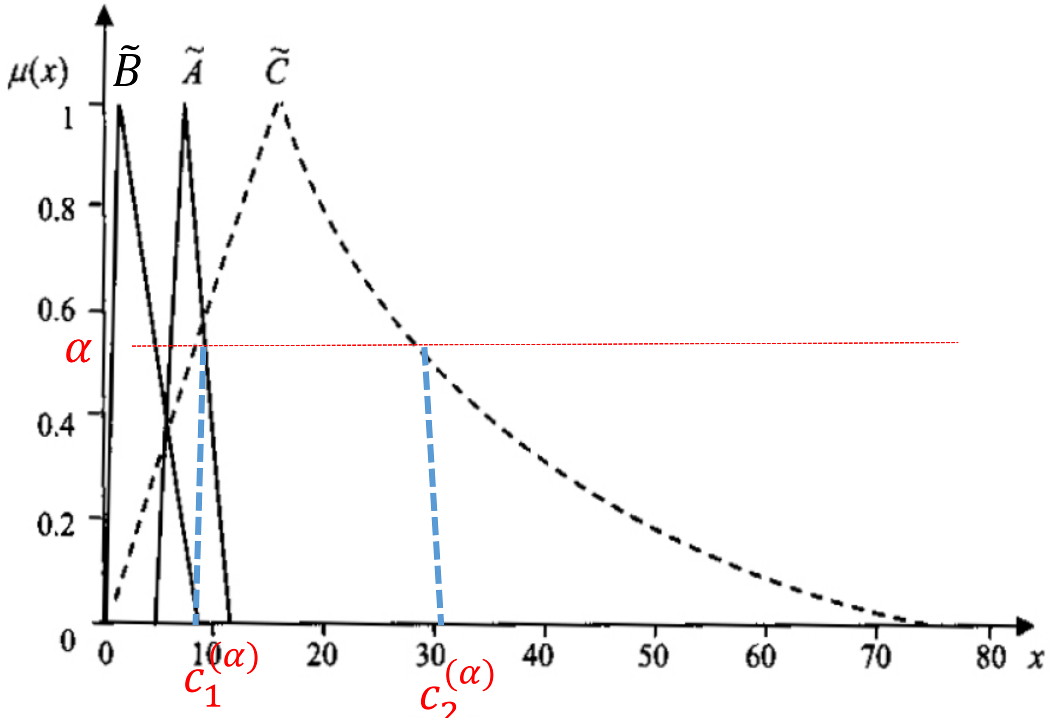
$$\tilde{C} = \tilde{A}.\tilde{B} = [a_1^{(\alpha)}.b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}.b_2^{(\alpha)}] = \left[4(\alpha+1).2\alpha, -4(\alpha-3).(-4(\alpha - \frac{3}{2}))\right]$$

$$= [8\alpha^2 + 8\alpha, 16\alpha^2 - 72\alpha + 72]$$

تفریق اعداد فازی

$$C_1^{(\alpha)} = 8\alpha^2 + 8\alpha \xrightarrow{C_1^{(\alpha)} = x \qquad \alpha = \mu_{\tilde{c}}^{L}(x)} 8\left(\mu_{\tilde{c}}^{L}(x)\right)^2 + 8(\mu_{\tilde{c}}^{L}(x)) - x = 0$$

$$C_2^{(\alpha)} = 16\alpha^2 - 72\alpha + 72 \xrightarrow{C_2^{(\alpha)} = x \qquad \alpha = \mu_{\tilde{c}}^{R}(x)} 16\left(\mu_{\tilde{c}}^{R}(x)\right)^2 - 72(\mu_{\tilde{c}}^{R}(x)) + 72 - x = 0$$



ضرب اعداد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{2}x} & ;0 \le x \le 16 \\ \frac{1}{2}\left(4.5 - \sqrt{4.5^2 - 4\left(4.5 - \frac{1}{16}x\right)}\right) & ;16 \le x \le 72 \\ 0 & ;otherwise \end{cases}$$

۱. با استفاده از برش α

$$\tilde{A} \div \tilde{B} = \left[a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}\right] \div \left[b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}\right] \longrightarrow \tilde{A} \div \tilde{B} = \left[\frac{a_1^{(\alpha)}}{b_2^{(\alpha)}}, \frac{a_2^{(\alpha)}}{b_1^{(\alpha)}}\right]$$

مشروط به اینکه $b_2^{(\alpha)} \neq 0$ و $b_1^{(\alpha)} \neq 0$ باشد.

۲. از طریق اصل توسعه

اجتماع

$$\mu_{\tilde{A} \div \tilde{B}}(z) = \bigvee_{z = x \div y} \left[\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y)\right]$$

اشتراک

مثال:

دو عدد فازی مثلثی $\tilde{A} = \tilde{8}$ و $\tilde{B} = \tilde{2}$ را در نظر بگیرید.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x - 1 & ;4 \le x \le 8 \\ -\frac{1}{4}x + 3 & ;8 \le x \le 12 \\ 0 & ;othervise \end{cases}$$

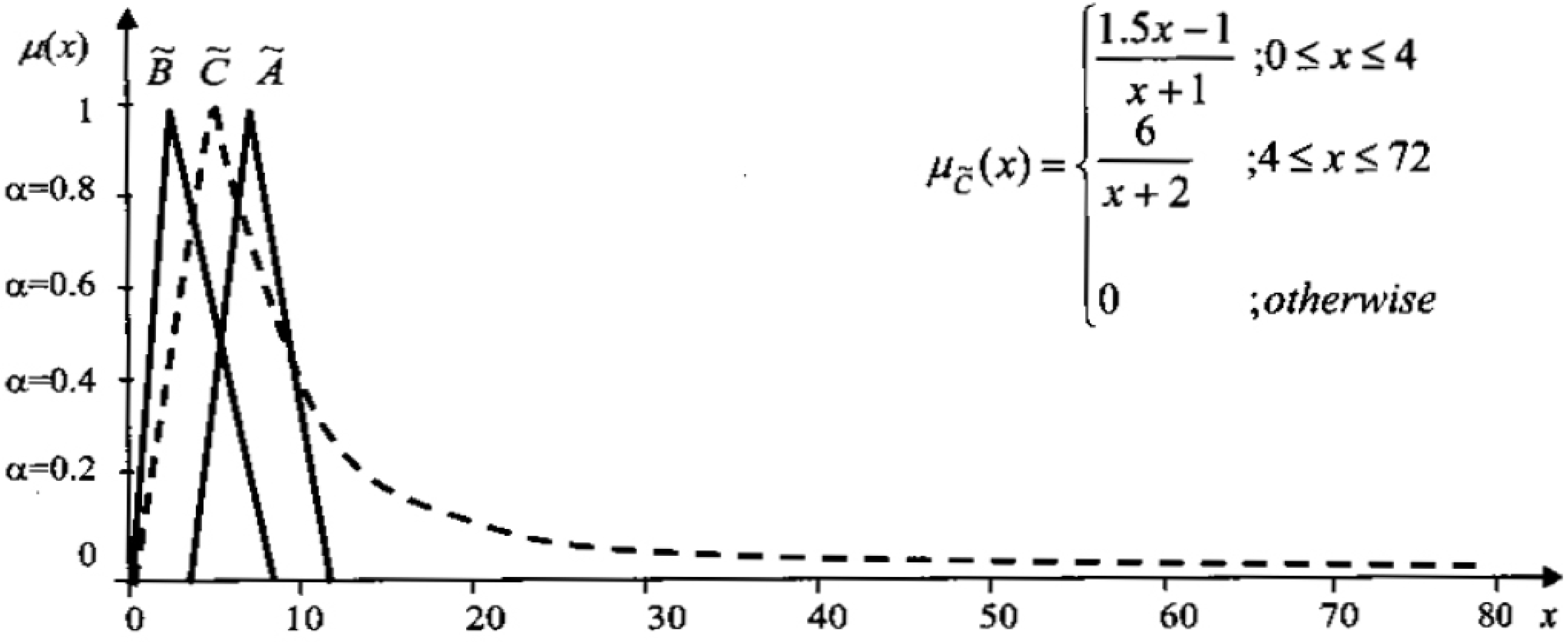
$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & ;0 \le x \le 2 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2} & ;2 \le x \le 6 \\ 0 & ;othervise \end{cases}$$

$$\tilde{C} = \tilde{A} \div \tilde{B}$$

$$\tilde{A} = \left[a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}\right] = \left[4(\alpha+1), -4(\alpha-3)\right]$$

$$\tilde{B} = \left[b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}\right] = \left[2\alpha, -4(\alpha - \frac{3}{2})\right]$$

$$\tilde{C} = \tilde{A} \div \tilde{B} = \left[\frac{a_1^{(\alpha)}}{b_2^{(\alpha)}}, \frac{a_2^{(\alpha)}}{b_1^{(\alpha)}}\right] = \left[\frac{4(\alpha+1)}{(-4(\alpha - \frac{3}{2}))}, \frac{-4(\alpha-3)}{2\alpha}\right]$$



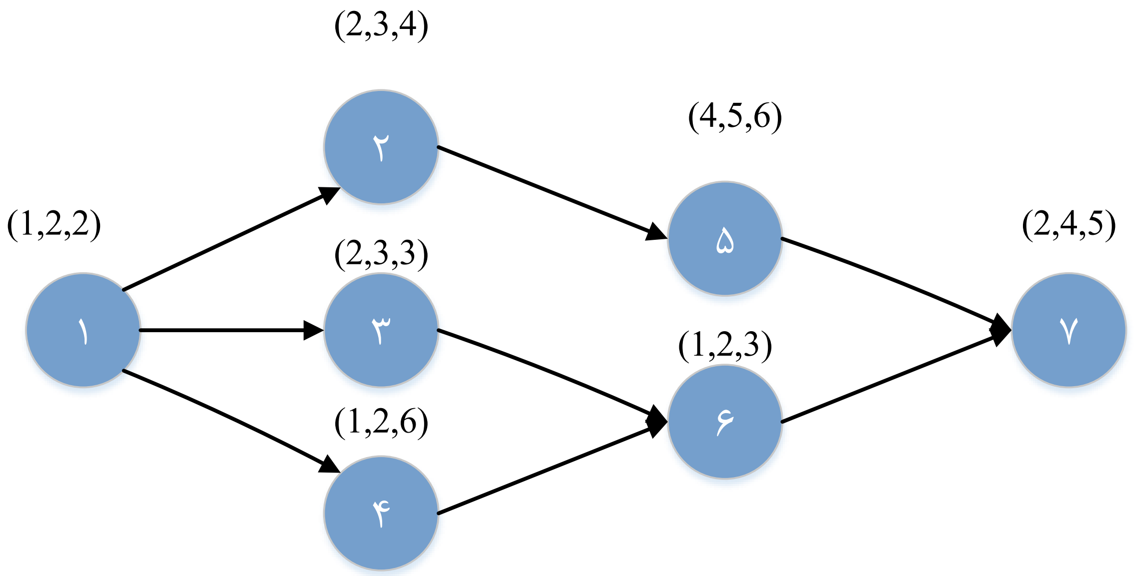
$$\mu_{\tilde{C}}(x)=\begin{cases}\dfrac{1.5x-1}{x+1} & ;0\le x\le 4\\ \dfrac{6}{x+2} & ;4\le x\le 72\\ 0 & ;otherwise\end{cases}$$

تقسیم اعداد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$

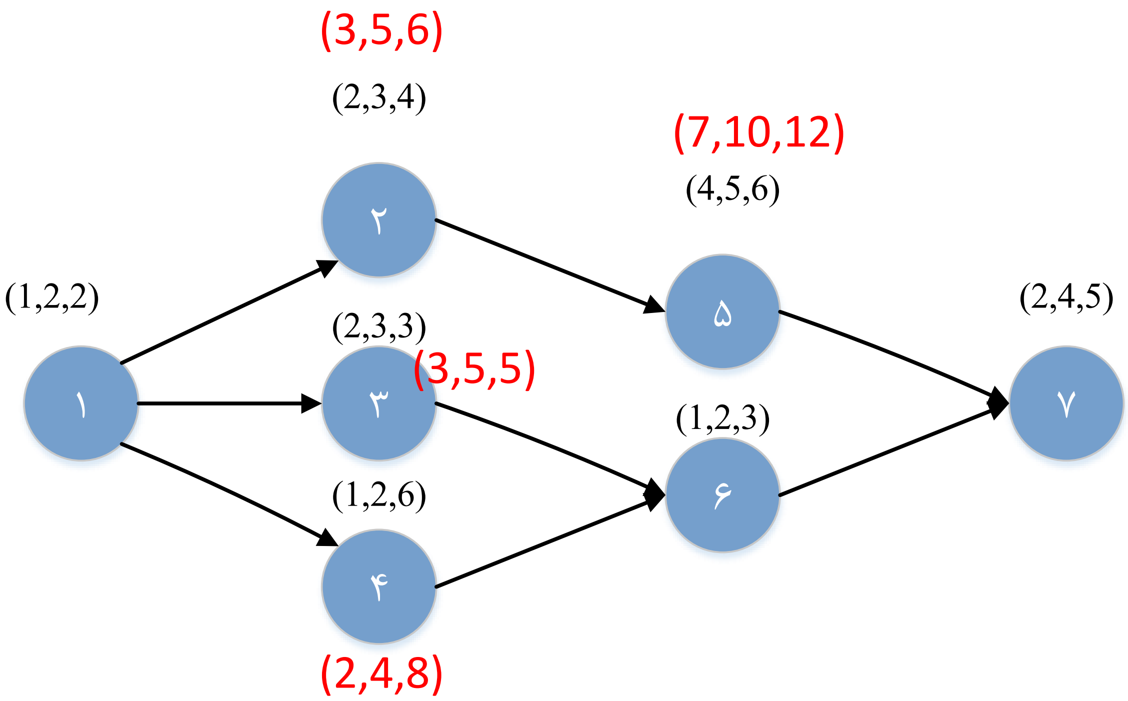
می خواهیم به این سوال پاسخ دهیم که آیا بیشینه یا کمینه دو عدد فازی، عدد فازی جدید است یا نه یکی از آن دو است؟

مثال (کنترل پروژه):

فرض کنید یک پروژه با ۷ فعالیت داریم. این پروژه از فعالیت ۱ شروع می شود که پیشنیاز فعالیتهای ۲، ۳ و ۴ است. بعد از اتمام فعالیت ۲، فعالیت ۵ می تواند شروع شود. بعد از اتمام فعالیتهای ۳ و ۴، فعالیت ۶ می تواند شروع شود. در نهایت، پس از پایان فعالیتهای ۵ و ۶، فعالیت ۷ می تواند شروع شود.



الان فعالیت ۲ چه زمانی پایان می یابد؟



زمان اتمام فعالیت۲ = (1,2,2)+(2,3,4)=(3,5,6)

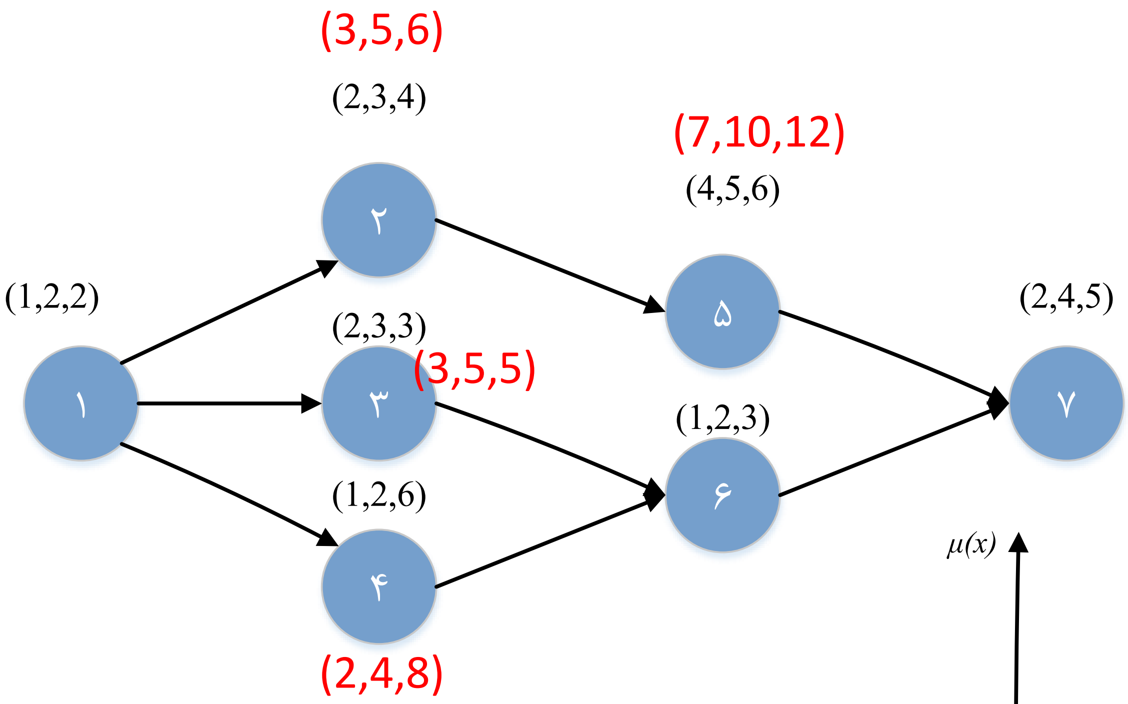
زمان اتمام فعالیت۳ = (1,2,2)+(2,3,3)=(3,5,5)

زمان اتمام فعالیت۴ = (1,2,2)+(1,2,6)=(2,4,8)

زمان اتمام فعالیت۵ = (3,5,6)+(4,5,6)=(7,10,12)

سوال:

فعالیت ۶ چه زمانی شروع می شود؟



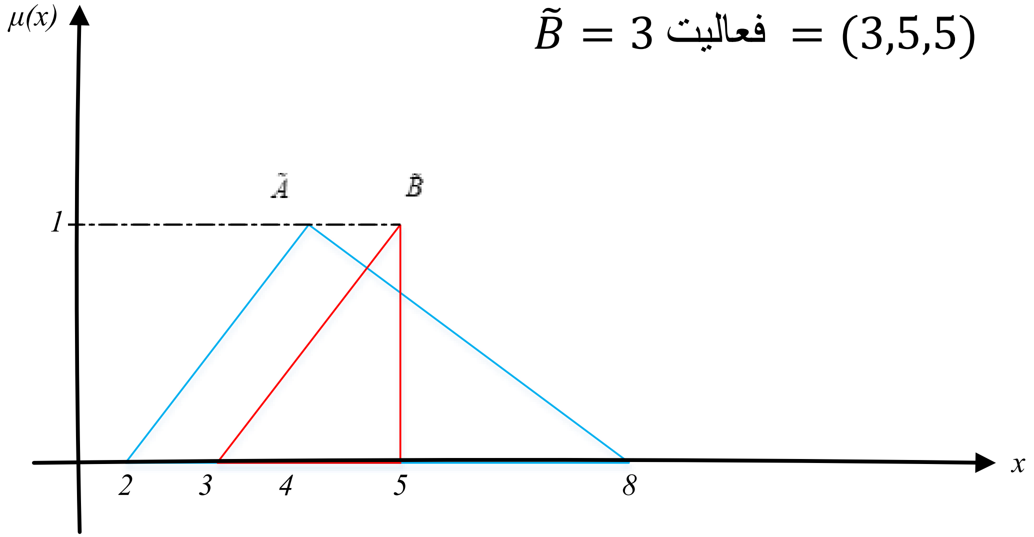
زمان شروع فعالیت ۶:

باید ببینیم بین فعالیت ۳ و ۴ کدامیک دیرتر به پایان می رسد.
درواقع، باید بیشینه دو عدد فازی را تعیین کنیم.

$\tilde{A} = 4$ فعالیت $= (2,4,8)$

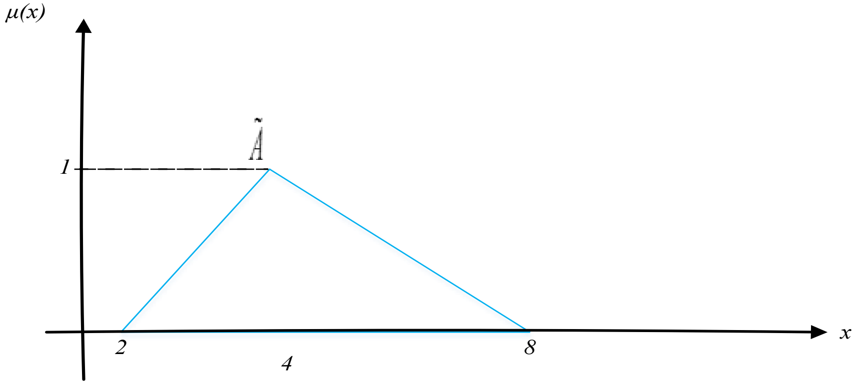
$\tilde{B} = 3$ فعالیت $= (3,5,5)$

مفهوم بیشینه دو عدد فازی به این معناست که بعضی قسمتها $\tilde{A}$، بیشینه است و در بعضی قسمتها $\tilde{B}$.
همچنین، بیشینه دو عدد فازی عدد فازی دیگری است .



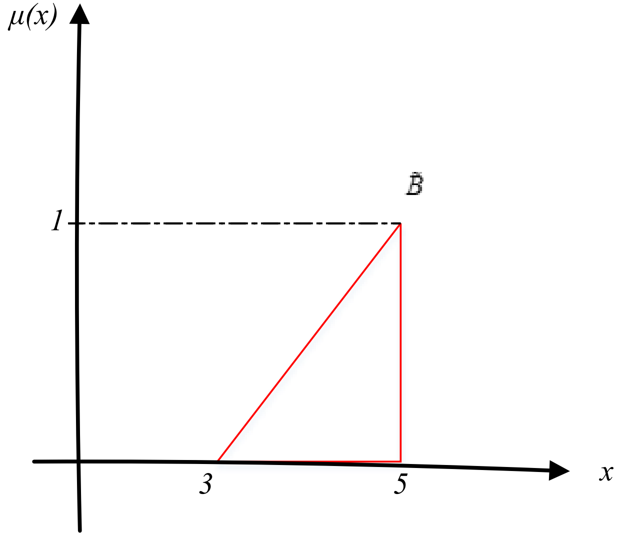
برای محاسبه بیشینه (یا کمینه) دو عدد فازی $\tilde{B}$ و $\tilde{A}$ ، ابتدا کرانهای چپ و راست اعداد را بدست می آوریم.

$\tilde{A} = 4$ فعالیت $= (2,4,8)$



$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L: \dfrac{x-2}{4-2} & 2 \le x \le 4 \\ R: \dfrac{8-x}{8-4} & 4 \le x \le 8 \\ 0 & O.W. \end{cases}$$

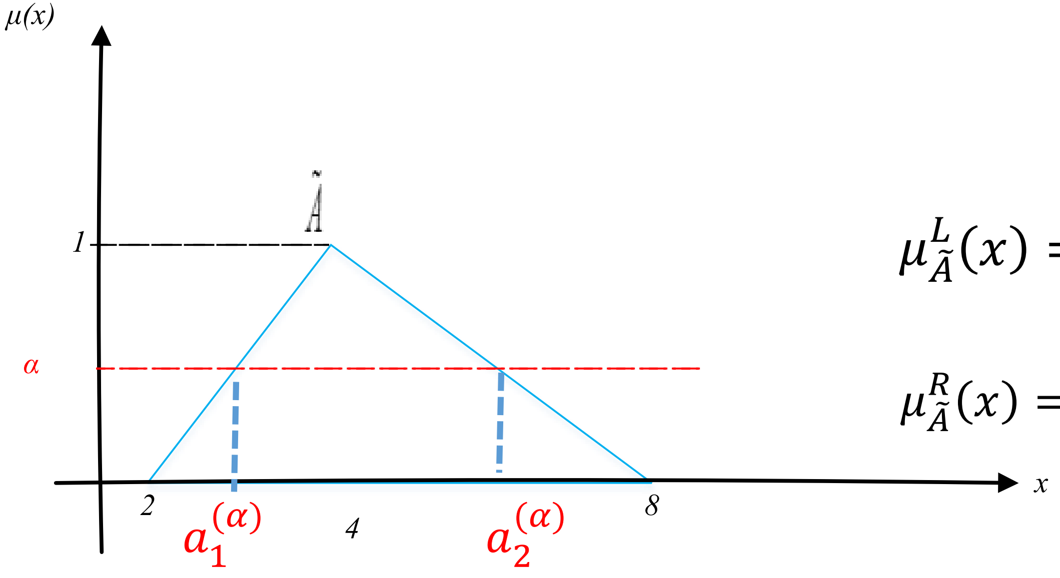
$\tilde{B} = 3$ فعالیت $= (3,5,5)$



$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} L: \dfrac{x-3}{5-3} & 3 \le x \le 5 \\ 1 & x = 5 \\ 0 & O.W. \end{cases}$$

اکنون برش آلفا می زنیم:

$\tilde{A} = 4$ فعالیت $= (2,4,8)$

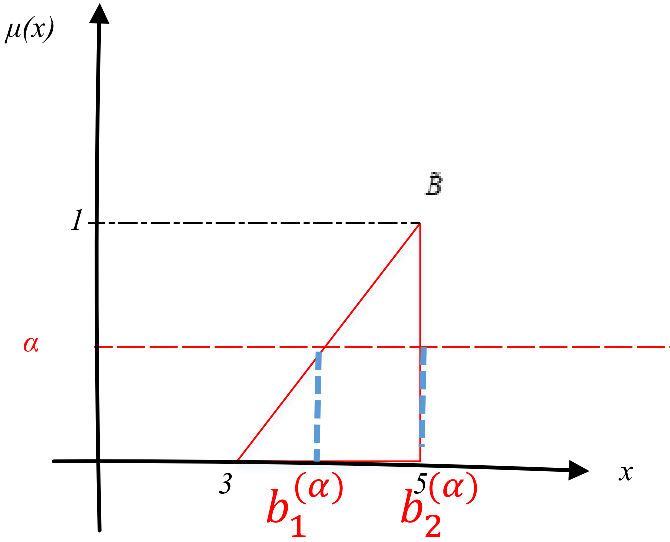


$$\mu^L_{\tilde{A}}(x) = \frac{x-2}{4-2} \xrightarrow{\alpha = \mu^L_{\tilde{A}}(x) \quad x = a_1^{(\alpha)}} a_1^{(\alpha)} = 2\alpha + 2$$

$$\mu^R_{\tilde{A}}(x) = \frac{8-x}{8-4} \xrightarrow{\alpha = \mu^R_{\tilde{A}}(x) \quad x = a_2^{(\alpha)}} a_2^{(\alpha)} = 8 - 4\alpha$$

$$\boxed{\tilde{A}_\alpha = [2\alpha + 2\,, 8 - 4\alpha\,]}$$

$\tilde{B} = 3$ فعالیت $= (3,5,5)$



$$\mu^L_{\tilde{B}}(x) = \frac{x-3}{5-3} \xrightarrow{\alpha = \mu^L_{\tilde{B}}(x) \quad x = b_1^{(\alpha)}} b_1^{(\alpha)} = 2\alpha + 3$$

$$\mu^R_{\tilde{B}}(x) = 1 \xrightarrow{\alpha = \mu^R_{\tilde{A}}(x) \quad x = b_2^{(\alpha)}} b_2^{(\alpha)} = 5$$

$$\boxed{\tilde{B}_\alpha = [2\alpha + 3\,, 5\,]}$$

برای محاسبه بیشینه دو عدد فازی $\tilde{B}$ و $\tilde{A}$ به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\tilde{A}_\alpha = [2\alpha + 2\,, 8 - 4\alpha\,]$$

$$\tilde{B}_\alpha = [2\alpha + 3\,, 5\,]$$

$$\tilde{C}_\alpha = \max(\tilde{A}_\alpha, \tilde{B}_\alpha) = \left[\max\left(a_1^{(\alpha)}, b_1^{(\alpha)}\right), \max(a_2^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)})\right]$$

ریاضیات فاصله‌ای، بیشینه دو فاصله، فاصله جدیدی است که نقطه انتهایی چپ آن، بیشینه نقاط انتهایی چپ فواصل اصلی و نقطه انتهایی راست آن، بیشینه نقاط انتهایی راست آنها می‌باشد. بنابراین، بیشینه $\tilde{A} \vee \tilde{B}$ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\tilde{A} \vee \tilde{B} = \left[a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}\right] \vee \left[b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}\right] = \left[a_1^{(\alpha)} \vee b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} \vee b_2^{(\alpha)}\right]$$

برای محاسبه بیشینه دو عدد فازی $\tilde{B}$ و $\tilde{A}$ به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\tilde{A}_\alpha = [2\alpha + 2\,, 8 - 4\alpha\,]$$

$$\tilde{B}_\alpha = [2\alpha + 3\,, 5\,]$$

$$\Rightarrow \tilde{C}_\alpha = \max(\tilde{A}_\alpha, \tilde{B}_\alpha) = \left[\max\left(a_1^{(\alpha)}, b_1^{(\alpha)}\right), \max(a_2^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)})\right]$$

$$\max\left(a_1^{(\alpha)}, b_1^{(\alpha)}\right) = \max(2\alpha + 2\,, 2\alpha + 3\,) = b_1^{(\alpha)} = 2\alpha + 3$$

$$\max\left(a_2^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}\right) = \max(8 - 4\alpha\,, 5\,) \Rightarrow$$

آیا می توان تشخیص داد که کدام بزرگتر است؟

خیر – لذا، باید به مقایسه این دو بپردازیم.

$$\boxed{8 - 4\alpha \geq 5 \rightarrow 3 \geq 4\alpha \rightarrow \alpha \leq \frac{3}{4}} \quad \rightarrow \begin{cases} 8 - 4\alpha & \alpha \leq \frac{3}{4} \\ 5 & \alpha \geq \frac{3}{4} \end{cases}$$

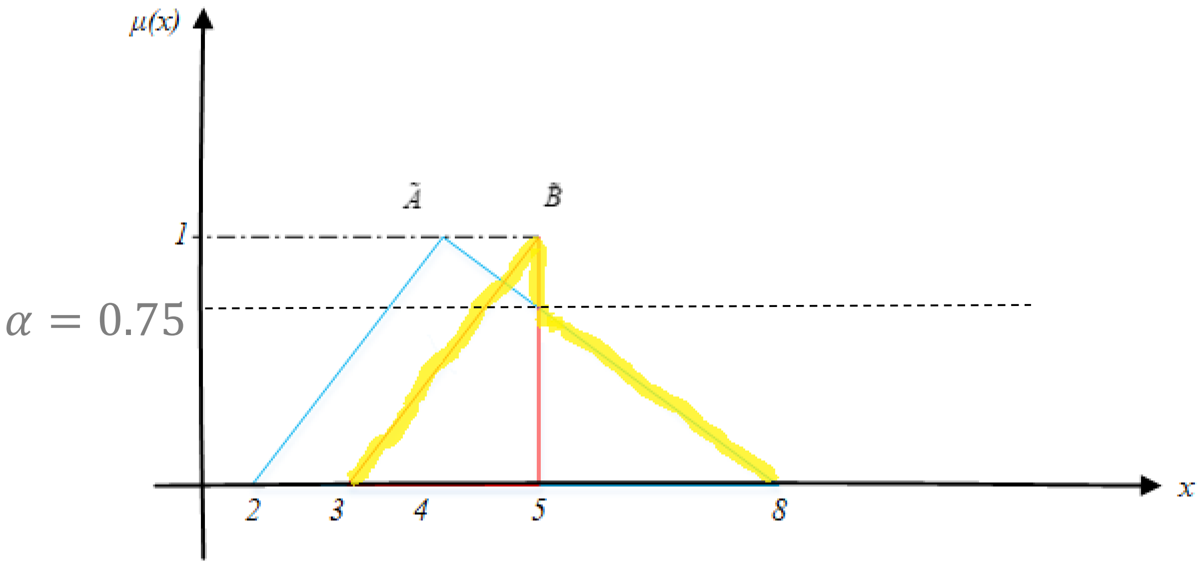
اکنون می خواهیم اعداد را برحسب x بدست آوریم:

$$x = 2\alpha + 3 \rightarrow \alpha = \frac{x-3}{2}$$

$$x = 8 - 4\alpha \rightarrow \alpha = \frac{8-x}{4}$$

$$x = 5 \rightarrow \alpha = 1$$

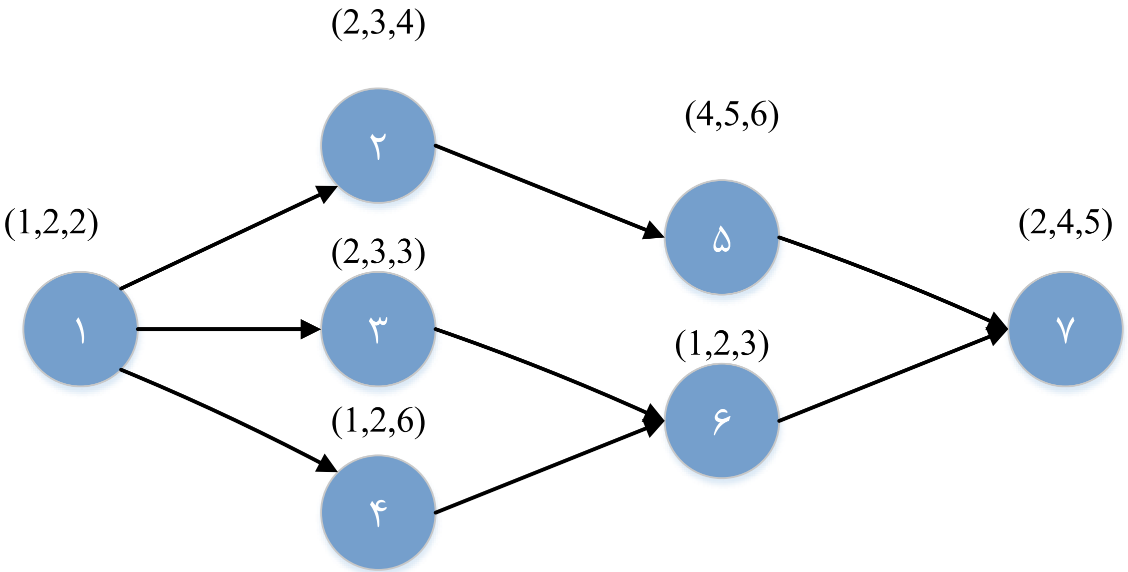
$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \begin{cases} L: \underbrace{\dfrac{x-3}{2}}_{\mu_{\tilde{B}}^{L}(x)} & 3 \le x \le 5 \\ R: \underbrace{\dfrac{8-x}{4}}_{\mu_{\tilde{A}}^{R}(x)} & 5 \le x \le 8 \\ 1 & x = 5 \end{cases}$$



زمان شروع فعالیت ۶:

تمرین:

مطلوب است محاسبه زمان اتمام پروژه.



در حساب فاصله‌ای، کمینه دو فاصله، فاصله جدیدی است که نقطه انتهایی چپ آن، کمینه نقاط انتهایی چپ فواصل اصلی و نقطه انتهایی راست آن، کمینه نقاط انتهایی راست آنها می‌باشد. بنابراین کمینه $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ عدد جدید $\tilde{A} \wedge \tilde{B}$ می‌باشد که بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\tilde{A} \wedge \tilde{B} = \left[a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}\right] \wedge \left[b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}\right] = \left[a_1^{(\alpha)} \wedge b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} \wedge b_2^{(\alpha)}\right]$$

$$\tilde{D}_\alpha = \min(\tilde{A}_\alpha, \tilde{B}_\alpha) = \left[min\left(a_1^{(\alpha)}, b_1^{(\alpha)}\right), min(a_2^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)})\right]$$

در مثال قبل کمینه فعالیت ۳ و ۴ کدام است؟

برای محاسبه کمینه دو عدد فازی $\tilde{B}$ و $\tilde{A}$ به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\tilde{A}_\alpha = [2\alpha + 2\,, 8 - 4\alpha\,]$$

$$\tilde{B}_\alpha = [2\alpha + 3\,, 5\,]$$

$$\tilde{D}_\alpha = \min(\tilde{A}_\alpha, \tilde{B}_\alpha) = \left[\min\left(a_1^{(\alpha)}, b_1^{(\alpha)}\right), \min(a_2^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)})\right]$$

$$\min\left(a_1^{(\alpha)}, b_1^{(\alpha)}\right) = \min(2\alpha + 2\,, 2\alpha + 3\,) = a_1^{(\alpha)} = 2\alpha + 2$$

$$\min\left(a_2^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}\right) = \min(8 - 4\alpha\,, 5\,)$$

آیا می توان تشخیص داد که کدام کوچکتر است؟

خیر – لذا، باید به مقایسه این دو بپردازیم.

$$\boxed{8 - 4\alpha \le 5 \to 3 \le 4\alpha \to \alpha \ge \frac{3}{4}}$$

$$\to \begin{cases} 5 & \alpha \le \frac{3}{4} \\ 8 - 4\alpha & \alpha \ge \frac{3}{4} \end{cases}$$

اکنون می خواهیم اعداد را برحسب x بدست آوریم:

$$\mathrm{x} = 2\alpha + 2 \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{x-2}{2}$$

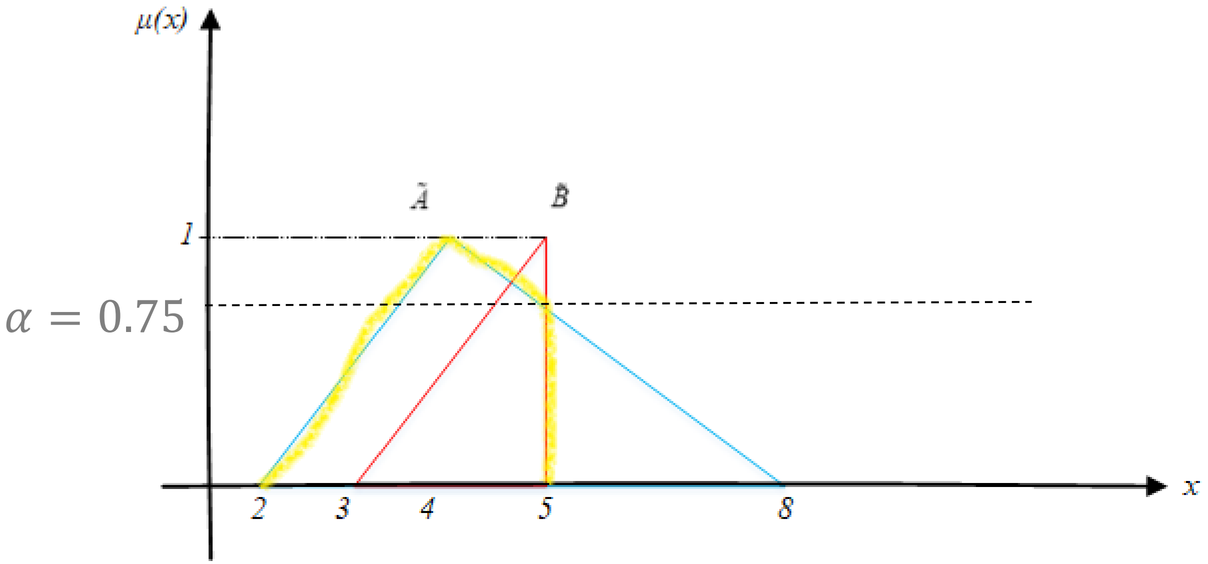
$$x = 8 - 4\alpha \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{8-x}{4}$$

$$x = 5 \quad \rightarrow \quad \alpha = 0.75$$

$\mu_{\tilde{A}}^{L}(x)$

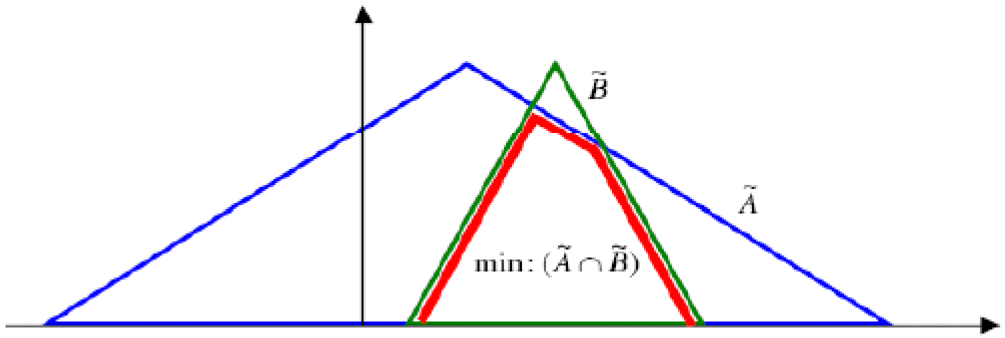
$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \begin{cases} L: \dfrac{x-2}{2} & 2 \le x \le 4 \\ R: \dfrac{8-x}{4} & 4 \le x \le 5 \\ 0.75 & x = 5 \end{cases}$$

$\mu_{\tilde{A}}^{R}(x)$

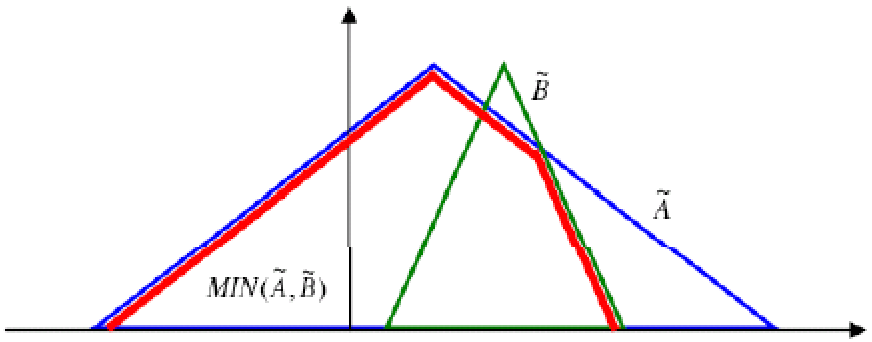


کمینه و بیشینه اعداد فازی

باید توجه داشت که بیشینه و کمینه دو عدد فازی، با بیشینه و کمینه توابع عضویت استفاده شده در ارتباط با اجتماع و اشتراک دو مجموعه فازی متفاوت است.



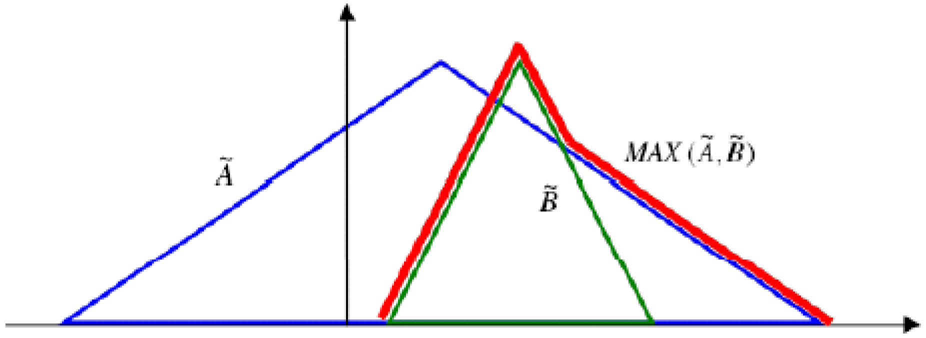
عملگر min که اشتراک دو عدد فازی می باشد



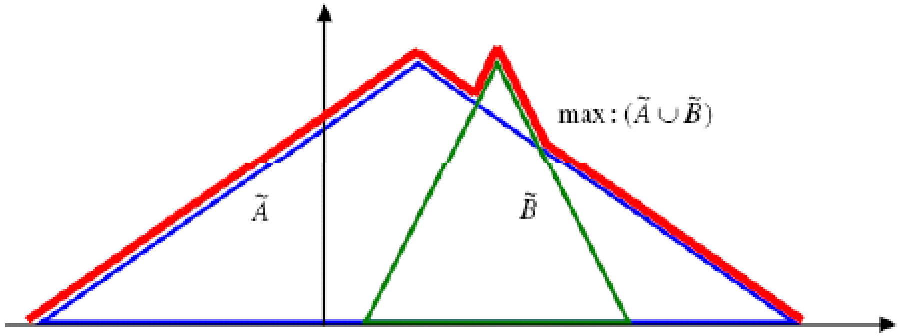
MIN دو عدد فازی

کمینه و بیشینه اعداد فازی

باید توجه داشت که بیشینه و کمینه دو عدد فازی، با بیشینه و کمینه توابع عضویت استفاده شده در ارتباط با اجتماع و اشتراک دو مجموعه فازی متفاوت است.



MAX دو عدد فازی



عملگر max (اجتماع) دو عدد فازی

کمینه و بیشینه اعداد فازی

کمینه دو عدد فازی ممکن است از طریق اصل توسعه بدست آید که تابع عضویت $\tilde{A} \wedge \tilde{B}$ بصورت زیر می‌باشد:

$$\mu_{\tilde{A} \wedge \tilde{B}}(z) = \bigvee_{z = x \wedge y} \left[\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y) \right]$$

بوسیله اصل توسعه نیز تابع عضویت بیشینه دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ بصورت زیر قابل محاسبه است:

$$\mu_{\tilde{A} \vee \tilde{B}}(z) = \bigvee_{z = x \vee y} \left[\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y) \right]$$

کمینه و بیشینه اعداد فازی

$$\tilde{A} = \tilde{3} = \{(1,0.3),(2,0.7),(3,1.0),(4,0.7),(5,0.3)\}$$

$$\tilde{B} = \tilde{7} = \{(5,0.2),(6,0.6),(7,1.0),(8,0.6),(9,0.2)\}$$

اشتراک
min

$$\max\{\tilde{B},\tilde{A}\} = \left\{\begin{matrix} (5,0.2),(6,0.3),(7,0.3),(8,0.3),(9,0.2), \\ (5,0.2),(6,0.6),(7,0.7),(8,0.6),(9,0.2), \\ (5,0.2),(6,0.6),(7,1),(8,0.6),(9,0.2), \\ (5,0.2),(6,0.6),(7,0.7),(8,0.6),(9,0.2), \\ (5,0.2),(6,0.3),(7,0.3),(8,0.3),(9,0.2) \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\max} \{(5,0.2),(6,0.6),(7,1),(8,0.6),(9,0.2)\}$$

رتبه‌بندی اعداد فازی

رتبه‌بندی کمیتهای فازی بر اساس یک یا چند ویژگی مختلف از اعداد فازی صورت می‌گیرد. این ویژگی ممکن است مرکز ثقل، ناحیه زیر تابع عضویت و یا نقاط تقاطع بین مجموعه‌ها باشد. یک روش رتبه‌بندی، ویژگی مشخصی از اعداد فازی را در نظر گرفته و آنها را بر اساس این ویژگی رتبه‌بندی می‌کند. از این رو، اولین نتیجه معقول این است که نباید انتظار داشته باشیم روشهای رتبه‌بندی مختلف رتبه‌های یکسانی را به یک نمونه یکسان از اعداد فازی نسبت دهند.

روشهای رتبه‌بندی اعداد فازی به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱) روشهایی که با استفاده از یک تابع نگاشت F، هر عدد فازی را به یک عدد غیرفازی تبدیل می‌کنند (بعبارتی، اگر $\widetilde{A}$ یک عدد فازی باشد آنگاه $F(\widetilde{A})=a$ یک عدد غیرفازی است). سپس با رتبه‌بندی اعداد غیرفازی که از طریق این تابع محاسبه شده‌اند، اعداد فازی مربوطه را مرتب می‌کنند.

۲) روشهایی که با استفاده از روابط فازی، اعداد فازی را بصورت زوجی با هم مقایسه نموده و نتایج مقایسات را با واژه‌های زبانی بیان می‌کنند. برای مثال، نتیجه رتبه‌بندی چیزی شبیه این جمله است: "عدد فازی $\widetilde{A}$ تا اندازه‌ای بهتر از عدد فازی $\widetilde{B}$ است".

با این وجود، هر روش مزایا و معایب خاص خود را دارد. در مورد روشهایی که به دسته اول تعلق دارند، چنین استدلال می‌شود که با تبدیل یک عدد فازی به یک عدد غیرفازی، بسیاری از اطلاعاتی که در طول محاسبات خود عمداً حفظ نموده‌ایم را از دست می‌دهیم. از طرف دیگر، این روشها اعداد فازی مورد نظر را بصورت ثابت رتبه‌بندی می‌کنند. بعبارتی، اگر $\tilde{A}$ بزرگتر از $\tilde{B}$ باشد و $\tilde{B}$ بزرگتر از $\tilde{C}$ باشد آنگاه همواره $\tilde{A}$ بزرگتر از $\tilde{C}$ خواهد بود. علاوه بر این، در نتایج رتبه‌بندی همواره یک عدد فازی وجود خواهد داشت که بعنوان بهترین، دومین بهترین، سومین بهترین و به همین ترتیب معرفی می‌شود.

روشهایی که به دسته دوم تعلق دارند، با حفظ واژه‌های زبانی در فرآیند مقایسات، اطلاعات فازی مسئله را حفظ می‌کنند. با این وجود، همانطور که یوان[1] اشاره می‌کند، ممکن است تعیین رتبه کل یک عدد فازی در میان سایر اعداد فازی برمبنای مقایسات زوجی آنها امکانپذیر نباشد. این بدان معناست که اگر $\tilde{A}$ بهتر از $\tilde{B}$ باشد و $\tilde{B}$ بهتر از $\tilde{C}$ باشد آنگاه ممکن است $\tilde{A}$ بهتر از $\tilde{C}$ نباشد.

در حالیکه تعدادی از روشها بدون توجه به نظرات تصمیم‌گیرنده (DM) رتبه‌بندی را انجام می‌دهند، برخی دیگر از آنها اجازه می‌دهند که DM در فرآیند رتبه‌بندی شرکت کند. مشارکت DM معمولاً به شکل بیان ارجحیتهای ریسکی او می‌باشد طوریکه DM اجازه دارد شدت ریسکی که حاضر است در مورد تصمیم خود بپذیرد را مشخص نماید.

روش رتبه‌بندی با استفاده از میانگین و پراکندگی فازی

این روش، اعداد فازی را بر اساس دو شاخص مقایسه می‌کند؛ مقدار میانگین اعداد فازی و پراکندگی اعداد فازی. فرض بر این است که برای DM ، عدد فازی با میانگین بیشتر و پراکندگی کمتر مقبولتر است.

لی و لای استفاده از میانگین توسعه‌یافته و انحراف استاندارد مبتنی بر سنجشهای احتمال پیشامدهای فازی را برای رتبه‌بندی اعداد فازی پیشنهاد می‌کنند. آنها دو نوع توزیع احتمالی را برای پیشامدهای فازی در نظر می‌گیرند و شاخصهای مرتبط را بصورت زیر بدست می‌آورند:

$X \sim U(a,b)$

$F(x)=\frac{1}{b-a}$

الف) توزیع یکنواخت :

$$\boxed{F(\tilde{M})=\frac{1}{|\tilde{M}|}} \rightarrow = \frac{1}{\int \mu(x)d_x}$$

عدد فازی $\tilde{M}$ را در نظر بگیرید. مقدار میانگین توسعه‌یافته آن بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{X}_U(\tilde{M})=\frac{\int_{S(\tilde{M})} x\mu_{\tilde{M}}(x)dx}{\int_{S(\tilde{M})} \mu_{\tilde{M}}(x)dx}$$

$$E(x)=\int xf(x)d_x=\int x\mu(x)\frac{1}{\int \mu(x)d_x}d_x=\frac{\int x\mu(x)d_x}{\int \mu(x)d_x}$$

جائیکه $S(\tilde{M})$، مجموعه پشتیبان عدد فازی $\tilde{M}$ می‌باشد.

همچنین، مقدار انحراف استاندارد بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_U(\tilde{M})=\left[\frac{\int_{S(\tilde{M})} x^2\mu_{\tilde{M}}(x)dx}{\int_{S(\tilde{M})} \mu_{\tilde{M}}(x)dx}-(\bar{X}_U(\tilde{M}))^2\right]^{1/2}$$

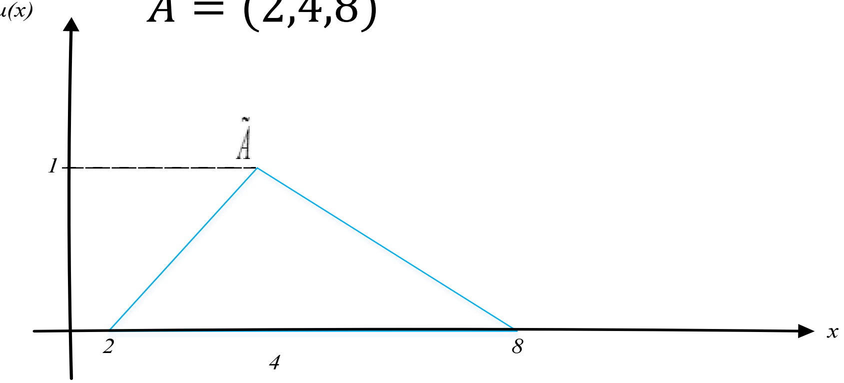
$$\mathrm{Var}(x)=E[(x-\mu)^2]=E(x^2)-[E(x)]^2$$

هنگامیکه عدد فازی $\tilde{M}$ یک عدد فازی مثلثی بصورت $\tilde{M}=(l,m,n)$ باشد، روابط گفته شده بصورت زیر خلاصه می‌شوند:

$$\bar{X}_U(\tilde{M})=\frac{1}{3}(l+m+n)$$

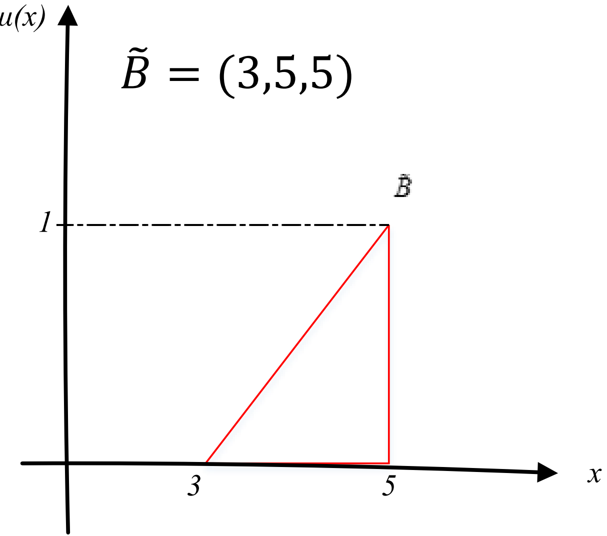
$$\sigma_U(\tilde{M})=\frac{1}{18}(l^2+m^2+n^2-lm-nl-mn)$$

$\tilde{A}=(2,4,8)$



$$\bar{X}_U(\tilde{A})=\frac{1}{3}(2+4+8)=\frac{14}{3}$$

$\tilde{B}=(3,5,5)$



$$\bar{X}_U(\tilde{B})=\frac{1}{3}(3+5+5)=\frac{13}{3}$$

ب) توزیع نسبی :

$$K = \frac{1}{\int \mu^2(x)d_x} \quad , \quad F(\tilde{M}) = k.\mu_{\tilde{M}}(x) \;;k \in R^+$$

بر اساس توزیع نسبی، میانگین و انحراف معیار عدد فازی $\tilde{M}$ از روابط زیر قابل محاسبه است:

$$\bar{X}_P(\tilde{M}) = \frac{\int_{S(\tilde{M})} x(\mu_{\tilde{M}}(x))^2 dx}{\int_{S(\tilde{M})} (\mu_{\tilde{M}}(x))^2 dx}$$

$$\sigma_P(\tilde{M}) = \left[\frac{\int_{S(\tilde{M})} x^2(\mu_{\tilde{M}}(x))^2 dx}{\int_{S(\tilde{M})} (\mu_{\tilde{M}}(x))^2 dx} - (\bar{X}_p(\tilde{M}))^2 \right]^{1/2}$$

$(1)^2 = 1$

$(0.9)^2 = 0.81$

$(0.8)^2 = 0.64$

$(0.7)^2 = 0.49$

و اگر $\tilde{M}$ یک عدد فازی مثلثی باشد، روابط فوق بصورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\bar{X}_P(\tilde{M}) = \frac{1}{4}(l+2m+n)$$

$$\sigma_P(\tilde{M}) = \frac{1}{80}(3l^2 + 4m^2 + 3n^2 - 2nl - 4lm - 4mn)$$

اندیسهای U و P بترتیب مشخص کننده توزیعهای یکنواخت و نسبی می‌باشند.

در توزیع نسبی، میانگین فازی نزدیک به مقدار m بوده و انحراف استاندارد آن نسبت به توزیع یکنواخت کوچکتر است. برای مثال، عدد فازی مثلثی $\tilde{M}=(l,m,n)=(2,3,5)$ را در نظر بگیرید.

$$\bar{X}_P(\tilde{M})=3.26 \qquad \bar{X}_U(\tilde{M})=3.33$$

$$\sigma_P(\tilde{M})=0.24 \qquad \sigma_U(\tilde{M})=0.39$$

این پدیده نشان می‌دهد که در توزیع نسبی تمایل مرکزی قویتری وجود دارد. لازم به ذکر است که انتخاب توزیع یکنواخت و نسبی اختیاری می‌باشد.

اکنون، فرض کنید که مقدار میانگین و پراکندگی برای دو عدد فازی $\tilde{M}_i$ و $\tilde{M}_j$ محاسبه شده است. قاعده مورد استفاده برای رتبه‌بندی آنها بصورت زیر می‌باشد:

رتبه‌بندی اعداد فازی

مقایسه مقادیر میانگین	مقایسه مقادیر انحراف استاندارد	نتیجه رتبه‌بندی
$\bar{X}(\tilde{M}_i) > \bar{X}(\tilde{M}_j)$	———	$\tilde{M}_i > \tilde{M}_j$
$\bar{X}(\tilde{M}_i) = \bar{X}(\tilde{M}_j)$	$\sigma(\tilde{M}_i) < \sigma(\tilde{M}_j)$	$\tilde{M}_i > \tilde{M}_j$

توجه کنید که مقدار انحراف استاندارد (σ) تنها زمانی مورد استفاده قرار می گیرد که مقادیر میانگین اعداد فازی با هم برابر باشند. برخلاف میانگین، انحراف استاندارد کوچکتر، عدد فازی بهتری را نشان می‌دهد.

مثال می‌خواهیم یکی از ۳ پروژه سرمایه‌گذاری را با استفاده از شاخصهای هزینه، اثرات محیطی، تخمین سود و هزینه نگهداری سالانه انتخاب نماییم. مقادیر فازی هریک از ۳ پروژه بصورت زیر محاسبه شده است:

$$\tilde{u}_1 = (5,6,8.4), \tilde{u}_2 = (2,3,5), \tilde{u}_3 = (1,4,4)$$

فرض کنید که تابع احتمالی، یک تابع چگالی یکنواخت است.

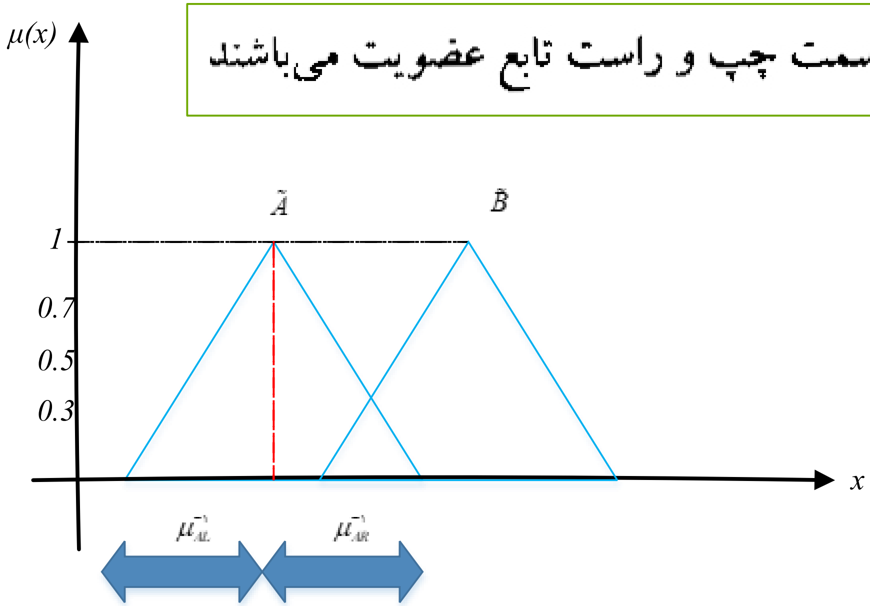
$$\bar{X}(u_1) = 6.47, \bar{X}(u_2) = 3.33, \bar{X}(u_3) = 3$$

$$\sigma(u_1) = 0.51, \sigma(u_2) = 0.39, \sigma(u_3) = 0.5$$

از آنجا که $\bar{X}(u_1) > \bar{X}(u_2) > \bar{X}(u_3)$ می‌باشد، لذا رتبه‌بندی پروژه‌های فوق بصورت $u_1 > u_2 > u_3$ است.

روش چانگ و لی

$\mu_{AL}^{-1}(\alpha)$ و $\mu_{AR}^{-1}(\alpha)$ نیز بترتیب معکوس قسمت سمت چپ و راست تابع عضویت می‌باشند



چانگ و لی، *شاخص کل رتبه‌بندی موجودیت* $(OERI)$ را برای روش خود بصورت زیر تعریف می کنند:

$$OERI(\tilde{A}) = \int_0^1 w(\alpha)(\chi_1(\alpha)\mu_{AL}^{-1}(\alpha) + \chi_2(\alpha)\mu_{AR}^{-1}(\alpha))\ d\alpha$$

جائیکه $\chi_1(\alpha)$ و $\chi_2(\alpha)$ نوعی وزندهی شخصی هستند که نشاندهنده ارجحیتهای خنثی، خوشبین و بدبین DM هستند با این محدودیت که $\chi_1(\alpha) + \chi_2(\alpha) = 1$ است.

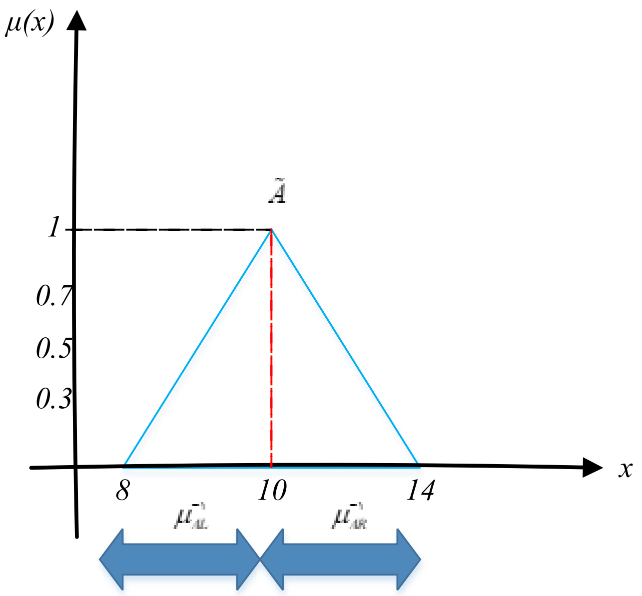
پارامتر $w(\alpha)$ برای مشخص نمودن وزنهایی بکار می‌رود که بمعنای اطمینان از درجات عضویت هستند. برای مثال، گاهی اوقات درجات عضویت نزدیک $\alpha = 0.5$ اعتبار بیشتری دارند و لذا برای انعکاس این امر باید رابطه مناسبی برای $w(\alpha)$ مشخص شود. اگر میزان اطمینان از درجات عضویت برای همه درجات عضویت یکسان باشد $w(\alpha) = 1$ در نظر گرفته می‌شود.

اعداد فازی $\tilde{A}$، $\tilde{B}$ و $\tilde{C}$ بصورت زیر مفروض اند:

$$\tilde{A}=(10,10,2,4),\ \tilde{B}=(11,11,5,1),\ \tilde{C}=(10,12,1,3)$$

الف) اعداد فازی فوق را با روش چانگ و لی و با $\chi_1(\alpha)=0.3$ و $w(\alpha)=1$ رتبه‌بندی کنید.

$\tilde{A}=(10,10,2,4)$



$$\mu_{AL}(x)=\frac{x-8}{2};8\le x\le 10 \Rightarrow \mu_{\tilde{A}L}^{-1}(\alpha)=8+2\alpha$$

$$\mu_{AR}(x)=\frac{14-x}{4};10\le x\le 14 \Rightarrow \mu_{\tilde{A}R}^{-1}(\alpha)=14-4\alpha$$

$$OERI(\tilde{A})=\int_0^1(0.3(8+2\alpha)+0.7(14-4\alpha))\,d\alpha=\int_0^1(12.2-2.2\alpha)\,d\alpha=11.1$$

$$\mu_{BL}(x)=\frac{x-6}{5};6\le x\le 11 \Rightarrow \mu_{\tilde{B}L}^{-1}(\alpha)=6+5\alpha$$

$$\mu_{BR}(x)=\frac{12-x}{1};11\le x\le 12 \Rightarrow \mu_{\tilde{B}R}^{-1}(\alpha)=12-\alpha$$

$$OERI(\tilde{B})=\int_0^1(0.3(6+5\alpha)+0.7(12-\alpha))\,d\alpha=\int_0^1(10.2+0.8\alpha)\,d\alpha=10.6$$

$$\mu_{CL}(x)=\frac{x-9}{1};9\le x\le 10 \Rightarrow \mu_{\tilde{C}L}^{-1}(\alpha)=9+\alpha$$

$$\mu_{CR}(x)=\frac{15-x}{3};12\le x\le 15 \Rightarrow \mu_{\tilde{C}R}^{-1}(\alpha)=15-3\alpha$$

$$OERI(\tilde{C})=\int_0^1(0.3(9+\alpha)+0.7(15-3\alpha))\,d\alpha=\int_0^1(13.2-1.8\alpha)\,d\alpha=12.3$$

با توجه به محاسبات انجام‌شده خواهیم داشت $\tilde{C}>\tilde{A}>\tilde{B}$

روش چن

با داشتن n مجموعه فازی، مجموعه ماکزیمم‌سازی $\mu_M(x)$ و مینیمم‌سازی $\mu_m(x)$ توسط روابط زیر تعریف می‌شوند:

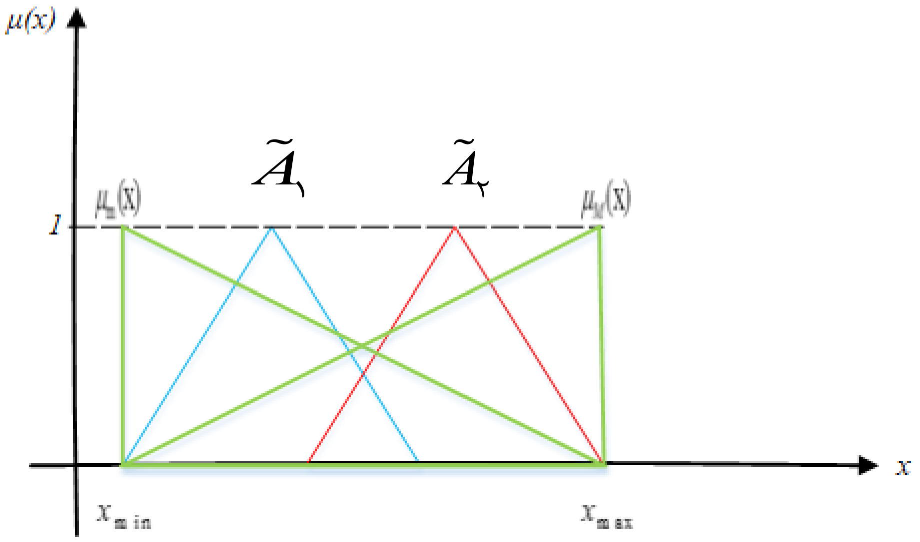
$$\mu_M(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{w(x-x_{\min})}{(x_{\max}-x_{\min})}\right)^{r} & ;x_{\min}<x<x_{\max}\\ 0 & ;otherwise\end{cases}$$

$$\mu_m(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{w(x-x_{\max})}{(x_{\min}-x_{\max})}\right)^{r} & ;x_{\min}<x<x_{\max}\\ 0 & ;otherwise\end{cases}$$

جائیکه:

$$w_i=\sup(\mu_i(x)),\ \ w=\inf(w_i),\ \ x_{\min}=\inf(x),\ \ x_{\max}=\sup(x)$$

و اندیس i معرف i امین مجموعه فازی است.



بمنظور رتبه‌بندی مجموعه‌های فازی، ابتدا مقدار مطلوبیت راست $(U_M(\tilde{A}_i))$ و مقدار مطلوبیت چپ $(U_m(\tilde{A}_i))$ برای هریک از مجموعه‌های فازی بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$U_M(\tilde{A}_i) = \sup(\mu_i(x) \cap \mu_M(x))$$

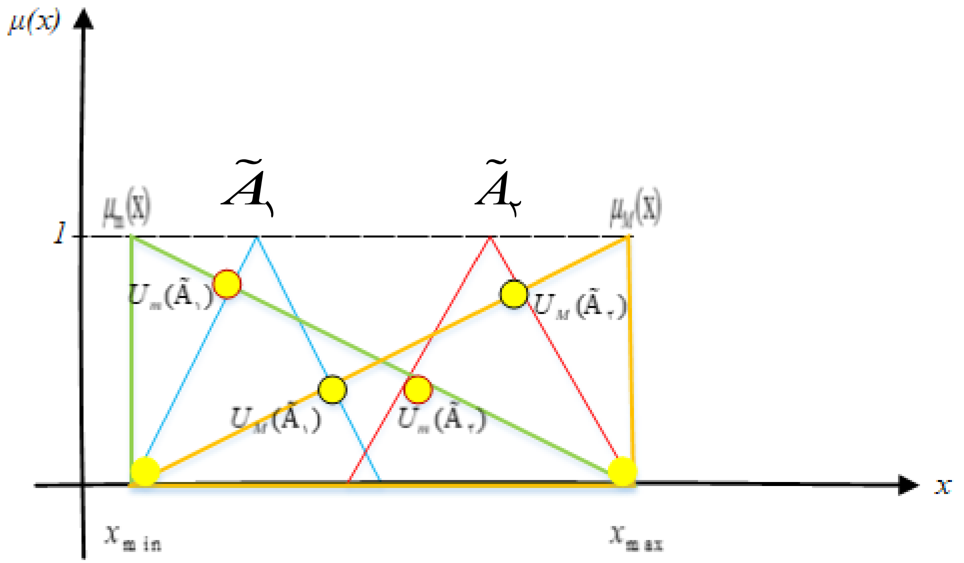
$$U_m(\tilde{A}_i) = \sup(\mu_i(x) \cap \mu_m(x))$$

$U_M(\tilde{A}_i)$ اشتراک مجموعه ماکزیمم‌سازی با قسمت سمت راست مجموعه فازی $\tilde{A}_i$ است.

بطور مشابه، $U_m(\tilde{A}_i)$ اشتراک مجموعه مینیمم‌سازی با قسمت سمت چپ مجموعه فازی $\tilde{A}_i$ می‌باشد. مقدار مطلوبیت کل مجموعه فازی $\tilde{A}_i$ بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$U_T(\tilde{A}_i) = \frac{U_M(\tilde{A}_i) + w - U_m(\tilde{A}_i)}{2}$$

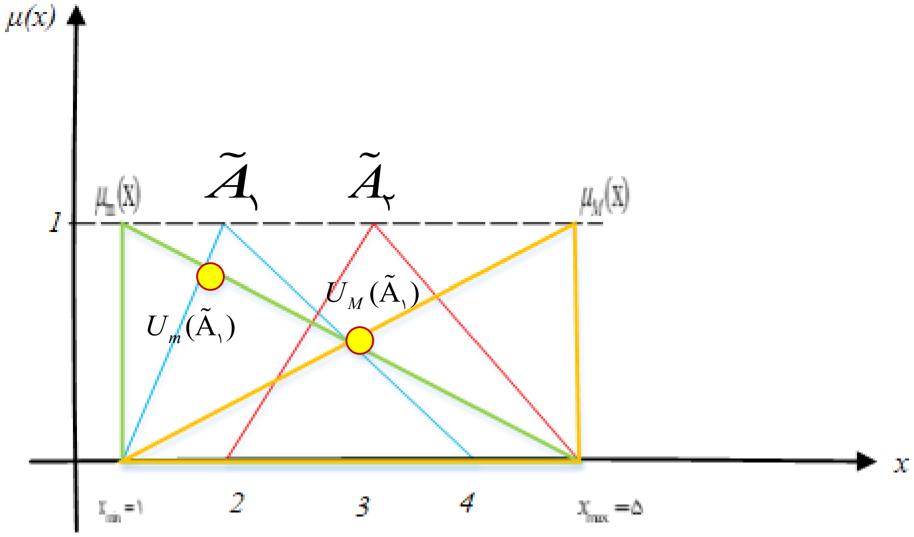
و درنهایت، نتایج رابطه قبل را بصورت صعودی مرتب می‌شوند و بزرگترین مقدار $U_T(\tilde{A}_i)$ معرف بهترین مجموعه فازی خواهد بود.



$$\tilde{A}_1 = (1,2,4)$$
$$\tilde{A}_2 = (2,3,5)$$

$$\mu_{\tilde{A}_1}(x) = \begin{cases} L: \dfrac{x-1}{2-1} = x-1 & 1 \le x \le 2 \\ R: \dfrac{4-x}{4-2} = \dfrac{4-x}{2} & 2 \le x \le 4 \\ 0 & O.W. \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{A}_2}(x) = \begin{cases} L: \dfrac{x-2}{3-2} = x-2 & 2 \le x \le 3 \\ R: \dfrac{5-x}{5-3} = \dfrac{5-x}{2} & 3 \le x \le 5 \\ 0 & O.W. \end{cases}$$



$$\mu_M(x) = \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} = \frac{x-1}{5-1} = \frac{x-1}{4}$$

$$\mu_m(x) = \frac{x - x_{\max}}{x_{\min} - x_{\max}} = \frac{x-5}{1-5} = \frac{5-x}{4}$$

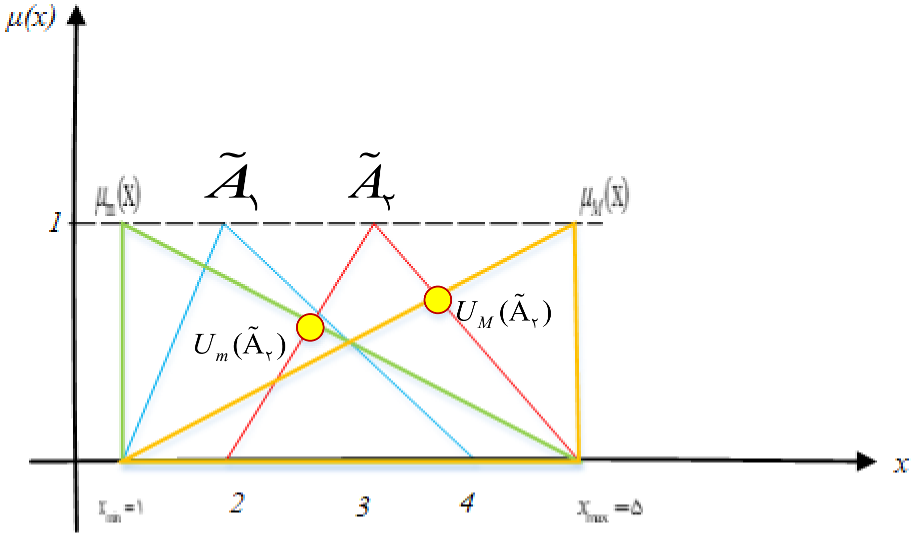
$$\boxed{U_{T_{\tilde{A}_1}} = \frac{0.5+1-0.8}{2} = 0.35}$$

$$\tilde{A}_1 = (1,2,4) \rightarrow \begin{matrix} \frac{4-x}{2} = \frac{x-1}{4} \rightarrow x = 3 \rightarrow 0.5 = U_M \\ x - 1 = \frac{5-x}{4} \rightarrow x = 1.8 \rightarrow 0.8 = U_m \end{matrix}$$

$$\tilde{A}_1 = (1,2,4)$$
$$\tilde{A}_2 = (2,3,5)$$

$$\mu_{\tilde{A}_1}(x) = \begin{cases} L: \dfrac{x-1}{2-1} = x-1 & 1 \le x \le 2 \\ R: \dfrac{4-x}{4-2} = \dfrac{4-x}{2} & 2 \le x \le 4 \\ 0 & O.W. \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{A}_2}(x) = \begin{cases} L: \dfrac{x-2}{3-2} = x-2 & 2 \le x \le 3 \\ R: \dfrac{5-x}{5-3} = \dfrac{5-x}{2} & 3 \le x \le 5 \\ 0 & O.W. \end{cases}$$



$$\mu_M(x) = \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} = \frac{x-1}{5-1} = \frac{x-1}{4}$$

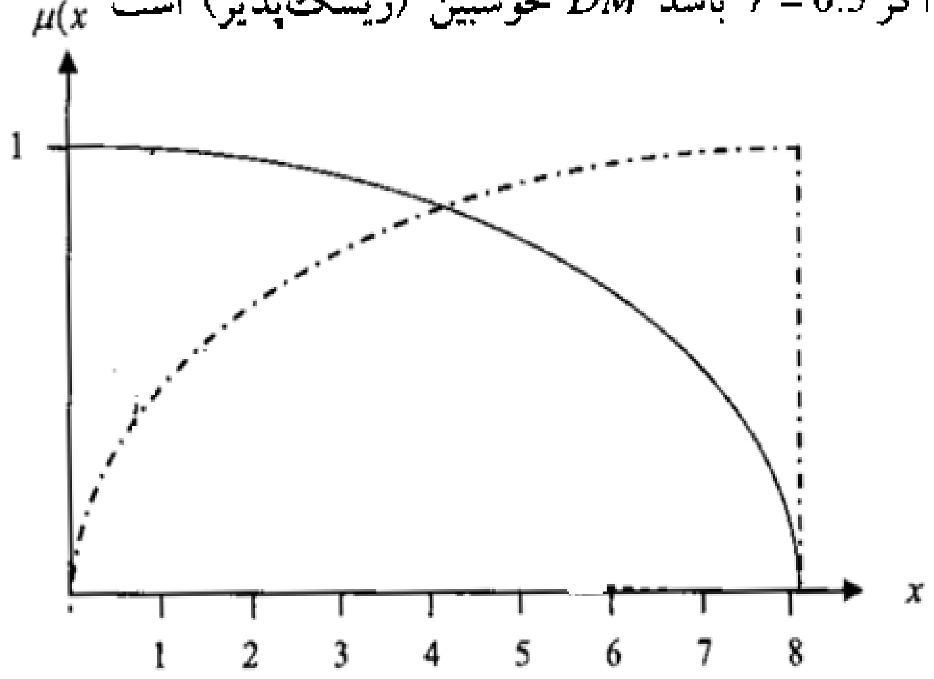
$$\mu_m(x) = \frac{x - x_{\max}}{x_{\min} - x_{\max}} = \frac{x-5}{1-5} = \frac{5-x}{4}$$

$$\boxed{U_{T_{\tilde{A}_2}} = \frac{0.66+1-0.6}{2} = 0.53}$$

$$\tilde{A}_2 = (2,3,5) \rightarrow \begin{matrix} \frac{5-x}{2} = \frac{x-1}{4} \rightarrow x = \frac{11}{3} \rightarrow 0.66 = U_M \\ x - 2 = \frac{5-x}{4} \rightarrow x = \frac{13}{5} \rightarrow 0.6 = U_m \end{matrix}$$

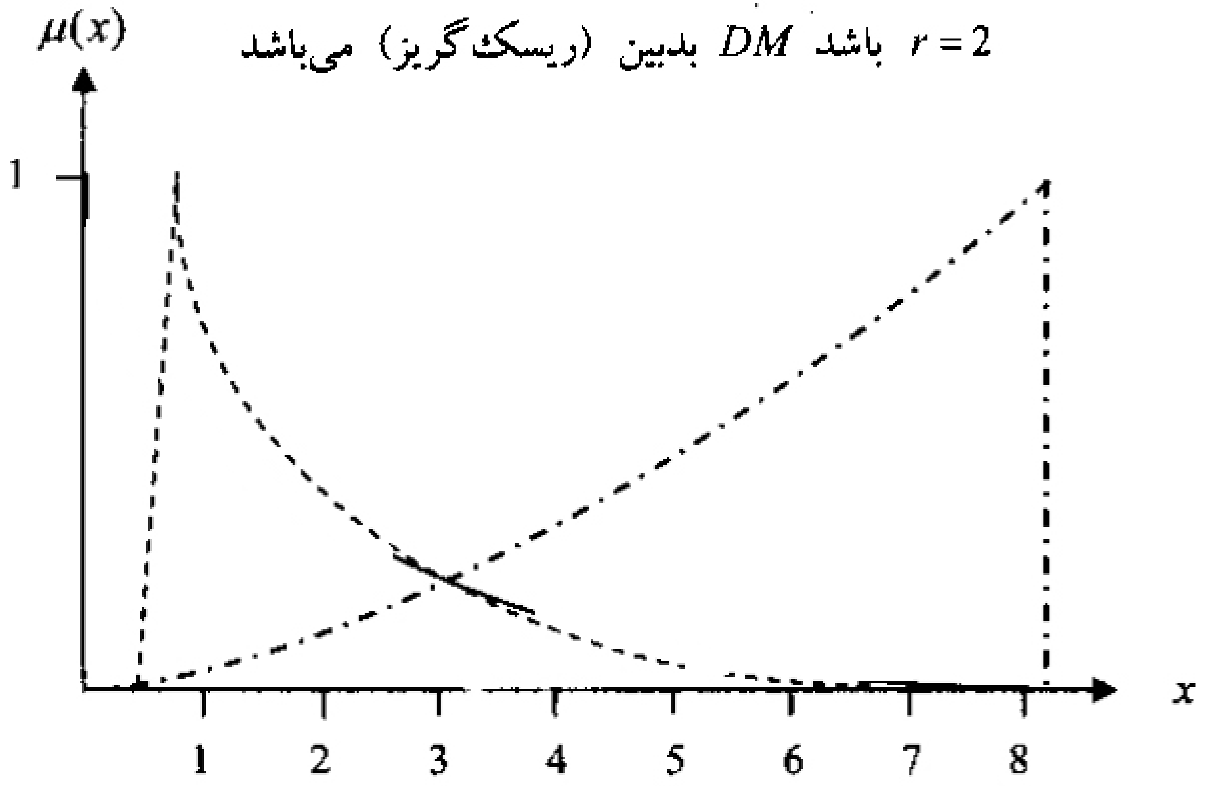
$$\boxed{\tilde{A}_2 > \tilde{A}_1}$$

اگر $r = 0.5$ باشد DM خوشبین (ریسک‌پذیر) است



ارجحیتهای خوش‌بینانه در روش چن

$r = 2$ باشد DM بدبین (ریسک‌گریز) می‌باشد



ارجحیتهای بدبینانه در روش چن

اعداد فازی $\tilde{A}$ ، $\tilde{B}$ و $\tilde{C}$ بصورت زیر مفروض‌اند:

$$\tilde{A} = (10,10,2,4),\ \ \tilde{B} = (11,11,5,1),\ \ \tilde{C} = (10,12,1,3)$$

اعداد فازی فوق را با روش چن و با $r = 0.5$ رتبه‌بندی کنید.

کوییز:

نشان دهید که آیا رابطه $\left(\tilde{A} \div \tilde{B}\right) \times \tilde{B} = \tilde{A}$ برقرار است یا خیر.

فصل چهارم

روابط فازی

۱. رابطه چیست؟

به کنش و واکنش میان دو پدیده در عالم را رابطه گویند.

۲. انواع روابط؟

رابطه قطعی یا رابطه فازی

۳. رابطه چه فرقی با مجموعه دارد؟

رابطه بین دو مجموعه تعریف می شود

روابط قطعی بر روی حاصلضرب دکارتی یا فضای حاصلضرب دو یا چند مجموعه تعریف می‌شوند. حاصلضرب دکارتی $X \times Y$ دو مجموعه X و Y، مجموعه‌ای از تمام زوجهای مرتب (x,y) است جائیکه $x \in X$ و $y \in Y$ می‌باشد.

فرض کنید X و Y دو مجموعه کلاسیک باشند. ضرب کارتزین دو مجموعه X و Y مجموعه ای از زوجهای مرتب (x_i , y_j) هستند بطوریکه:

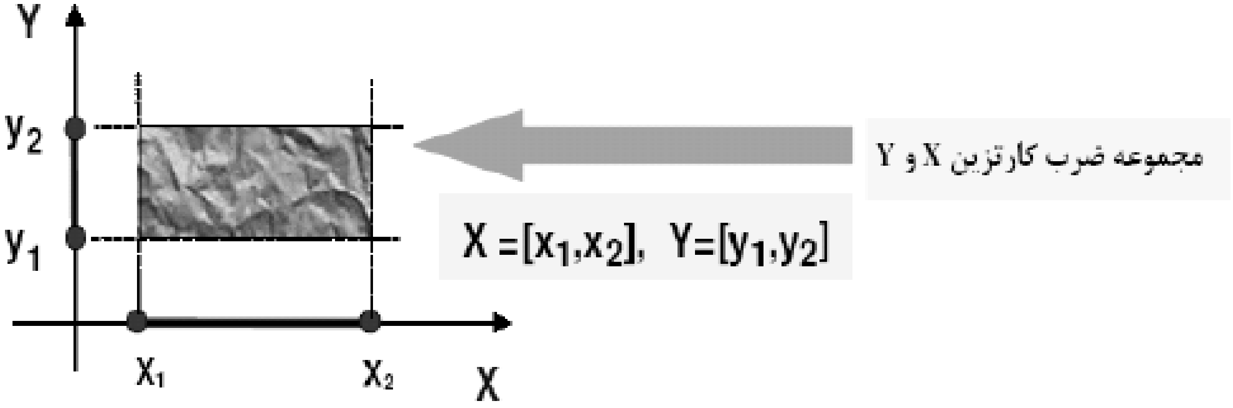
$$X \times Y = \{(x_i, y_j) \mid x_i \in X, Y_j \in Y, i = 1,\ldots,n, j = 1,\ldots,m\}$$

به عنوان مثال اگر $X = \{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ و $Y = \{y_1,y_2,y_3,\}$ باشند آنگاه ضرب کارتزینی $X \times Y$ یک مجموعه، ۱۲ عنصری خواهد بود که هر عنصر آن یک زوج مرتب از عناصر X و Y خواهند بود. در نتیجه اگر کاردینالیتی مجموعه x را $n(x)$ و کاردینالیتی مجموعه y را $n(y)$ در نظر بگیریم آنگاه خواهیم داشت:

$$n(X \times Y) = n(X) \times n(Y)$$

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

که فضای $X \times Y$ بصورت شماتیک در شکل زیر به تصویر کشیده شده است.



فضای مجموعه ضرب کارتزین دو مجموعه دوبعدی X و Y

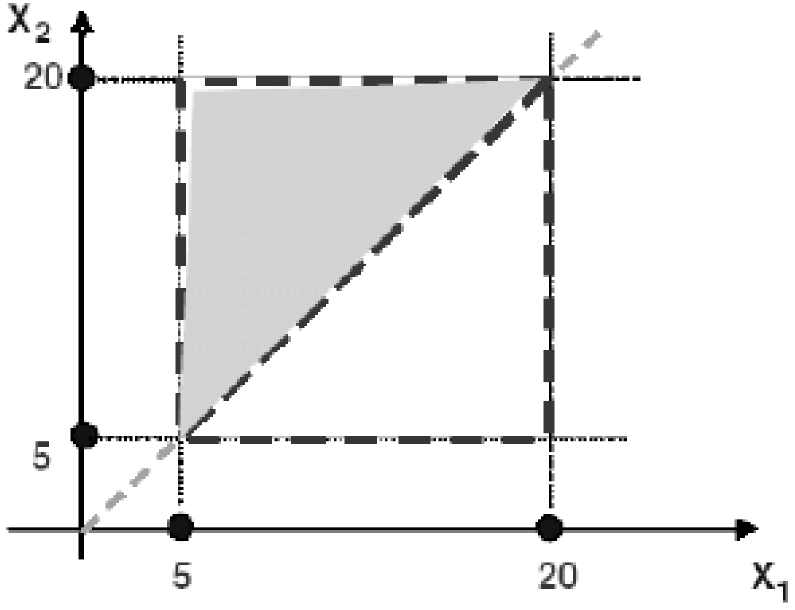
تعریف رابطه Relation

حال اگر برای فضای یک مجموعه ضرب کارتزینی، یک زیر مجموعه با شرایط خاصی تعریف می‌شود به آن یک رابطه (Relation) گفته می شود و با نماد R نشان داده می شود. بطور عمومی یک رابطه در فضای دو بعدی بصورت ذیل تعریف می شود.

$$\boxed{\mathrm{R} = \mathrm{R}(x_1, x_2) = \{(x_1, x_2) \mid \mathrm{p}(x_1, x_2), x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}}$$

جاییکه $p\ (x_1\ ,\ x_2)$ یک خاصیت یا مشخصه ای است که برای زوج‌های مرتب $(x_1\ ,\ x_2)$ تعریف می شود و در صورتیکه شرط را ارضاء نمایند عضوی از مجموعه رابطه R خواهند شد.

$$R=\{(x_1,x_2)\,\big|\; x_1\langle x_2,\quad x_1\in X_1,\ x_2\in X_2\}$$



مثال **یک رابطه قطعی:** رابطه بخش‌پذیری ، R_d که بر روی مجموعه $S=\{1,2,3,4,6\}$ تعریف‌شده را در نظر بگیرید.

$$R_d=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,6),(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(6,6)\}$$

۵ راه متفاوت برای نمایش R_d وجود دارد:

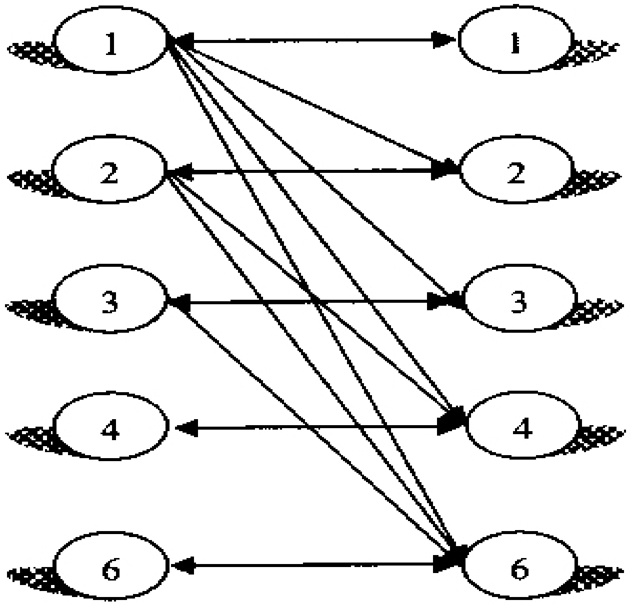
۱) بصورت زبانی با عبارت "x مقسوم علیه y است" تعریف می‌شود.

۲) بوسیله فهرست کردن مجموعه همه زوجهای مرتب

۳) بوسیله یک گراف جهت‌دار

۴) بصورت یک جدول

۵) بصورت یک ماتریس



x \ y	1	2	3	4	6
1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	1
3	0	0	1	0	1
4	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	1

$$R_d=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&1&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

فصل چهارم

روابط فازی

روابط، کاربردهای بسیار زیادی در "منطق"، "استدلال تقریبی"، "سیستمهای پایگاه قواعد" و ... دارند.

قاعده (IF x is A Then Y is B) در واقع یک رابطه بین مجموعه های X و Y را بیان می کند. لذا با این مقدمه کوتاه از روابط در مجموعه های کلاسیک و کاربردهای آن، روابط فازی در این فصل مطرح می گردند تا مقدمه ای برای ورود به منطق فازی و ایجاد پایگاه قواعد فازی در سیستم های فازی باشد.

روابط فازی

روابط فازی

در روابط فازی، عناصر را بصورت دوتایی و بطورکلی n تایی در نظر می‌گیریم که با درجه‌ای به یکدیگر مرتبط می‌شوند.

یک رابطه فازی دوتایی $\tilde{R}$ که بر روی $X \times Y$ تعریف شده است را در نظر بگیرید. مانند هر مجموعه فازی، می‌توانیم تمامی زوجهای رابطه را بصورت زیر نمایش دهیم:

$$\tilde{R} = \{((x, y), \mu_{\tilde{R}}(x, y))\}$$

جائیکه هر زوج (x, y) به حاصلضرب دکارتی $X \times Y$ تعلق دارد. رابطه R را برای حاصلضرب دکارتی گسسته $X \times Y$ بصورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\tilde{R} = \sum_{(x_i, y_j) \in X \times Y} \mu_{\tilde{R}}(x_i, y_j)/(x_i, y_j)$$

و برای حاصلضرب دکارتی پیوسته داریم:

$$\tilde{R} = \int_{X \times Y} \mu_{\tilde{R}}(x, y)/(x, y)$$

برای روابط فازی n گانه نیز می‌توان از نمادهای فوق استفاده نمود.

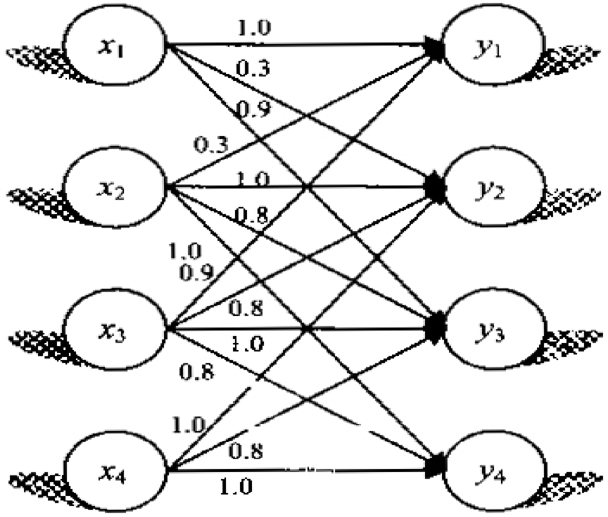
روابط فازی

روابط فازی روی مجموعه های قطعی:

مثال نمایش یک رابطه فازی: دو مجموعه گسسته $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ و $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$ را در نظر گرفته و در حاصلضرب دکارتی آنها رابطه فازی "x مشابه y است" را تعریف می‌کنیم.

$\tilde{R} = x \text{ is similar to } y$

$$\begin{aligned}\tilde{R} = {} & 1/(x_1,y_1) + 0.3/(x_1,y_2) + 0.9/(x_1,y_3) + 0/(x_1,y_4) \\ & + 0.3/(x_2,y_1) + 1/(x_2,y_2) + 0.8/(x_2,y_3) + 1/(x_2,y_4) \\ & + 0.9/(x_3,y_1) + 0.8/(x_3,y_2) + 1/(x_3,y_3) + 0.8/(x_3,y_4) \\ & + 0/(x_4,y_1) + 1/(x_4,y_2) + 0.8/(x_4,y_3) + 1/(x_4,y_4)\end{aligned}$$



R:

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	0.3	0.9	0
x_2	0.3	1	0.8	1
x_3	0.9	0.8	1	0.8
x_4	0	1	0.8	1

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.9 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0.8 & 1 \\ 0.9 & 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0 & 1 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

روابط فازی

مثال از رابطه فازی روی مجموعه های قطعی:

فرض کنید $X = \{x_1 , x_2 , x_3\}$ و $Y = \{y_1, y_2 , y_3 , y_4\}$ باشند و

روابط $\tilde{R}_1$ و $\tilde{R}_2$ بصورت زیر تعریف شود.

$\tilde{R}_1$ = x بطور قابل ملاحظه ای از y بزرگتر باشد

$\tilde{R}_2$ = y خیلی نزدیک به x باشد

که رابطه $\tilde{R}_1$ بصورت ماتریس ذیل می تواند تعریف شود.

$\mu_{\tilde{R}}(x,y)$

	$y_1 = 13$	$y_2 = 5$	$y_3 = 18$	$y_4 = 15$
$x_1 = 20$	0.8	1	0.1	0.7
$x_2 = 10$	0	0.8	0	0
$x_3 = 24$	0.9	1	0.7	0.8

روابط فازی روی مجموعه های فازی:

تعریف فرض کنید $X,Y \subseteq \Re$ و

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x) \mid x \in X)\}$$

$$\tilde{B} = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y) \mid y \in Y)\}$$

دو مجموعه فازی هستند آنگاه:

$$\tilde{R} = \tilde{R}(x, y) = \{((x, y), \mu_{\tilde{R}}(x, y)) \mid (x, y) \in X \times Y\}$$

یک رابطه فازی روی دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ خواهد بود اگر داشته باشیم:

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) \leq \mu_{\tilde{A}}(x), \quad \forall (x, y) \in X \times Y$$

و

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) \leq \mu_{\tilde{B}}(y), \quad \forall (x, y) \in X \times Y$$

مثال فرض کنید مجموعه فازی $\tilde{A}$ بیانگر درجه حرارت مناسب محیط و مجموعه فازی $\tilde{B}$ بیانگر "فشار نزدیک به بهینه" در یک مبدل حرارتی باشند.

$$\tilde{A} = \frac{0.2}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{1}{x_3}$$

$$\tilde{B} = \frac{0.3}{y_1} + \frac{0.9}{y_2}$$

ضرب کارتزین این دو مجموعه فازی می تواند بیانگر شرایط زوج فشار و درجه حرارت مبدل حرارتی که با عملیات بهینه و کارا همراه است باشد. بطوریکه:

$\mu_{\tilde{R}}(x,y)$

$$\tilde{A} \times \tilde{B} = \tilde{R} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.9 \end{bmatrix} \end{array}$$

نکته:
می توان کمتر از ۰.۲ هم قرار داد مثلا ۰.۱

سوال:

اشتراک و اجتماع بین رابطه ها معنی دارد؟

رابطه از جنس مجموعه است یا عدد؟

عملیات پایه بر روی روابط فازی

روابط فازی، اساساً مجموعه‌های فازی هستند که بر روی مجموعه‌های مرجع چندبعدی (که همان حاصلضرب دکارتی می‌باشد) تعریف می‌شوند. تمام عملیات مجموعه‌های فازی از قبیل *اجتماع*، *اشتراک*، *برش* α و موارد مشابه که در فصل ۲ دیدیم، در مورد روابط فازی نیز مورد استفاده قرار می‌گیرند

دو رابطه فازی $\tilde{R}_1$ و $\tilde{R}_2$ را در نظر بگیرید. اجتماع آنها رابطه جدیدی بصورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2 = \int_{X \times Y} \left[\mu_{\tilde{R}_1}(x,y) \vee \mu_{\tilde{R}_2}(x,y)\right] / (x,y)$$

و تابع عضویت $\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2$ که در رابطه فوق نشان داده شده است برای تمام زوجهای (x,y) متعلق به حاصلضرب دکارتی بصورت زیر می‌باشد:

$$\mu_{\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2}(x,y) = \mu_{\tilde{R}_1}(x,y) \vee \mu_{\tilde{R}_2}(x,y)$$

اشتراک روابط فازی $\tilde{R}_1$ و $\tilde{R}_2$ یک رابطه فازی جدید بصورت زیر است:

$$\boxed{\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2 = \int_{X\times Y} \left[\mu_{\tilde{R}_1}(x,y) \wedge \mu_{\tilde{R}_2}(x,y)\right] / (x,y)}$$

و تابع عضویت هر نقطه (x,y) از حاصلضرب دکارتی، کمینه تابع عضویت $\tilde{R}_1$ و $\tilde{R}_2$ خواهد بود

که از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\boxed{\mu_{\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2}(x,y) = \mu_{\tilde{R}_1}(x,y) \wedge \mu_{\tilde{R}_2}(x,y)}$$

مثال اجتماع و اشتراک روابط فازی: دو رابطه $\tilde{R}_1$ و $\tilde{R}_2$ که بصورت زیر نشان داده شده‌اند را در نظر بگیرید.

$\tilde{R}_1 =$ "x بزرگ‌تر از y است"

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.0	0.0	0.1	0.8
x_2	0.0	0.8	0.0	0.0
x_3	0.4	0.8	1.0	0.8

$\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2$:

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.4	0.4	0.2	0.8
x_2	0.5	0.8	1.0	1.0
x_3	0.5	0.8	1.0	0.8

$\tilde{R}_2 =$ "y خیلی بزرگ‌تر از x است"

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.4	0.4	0.2	0.1
x_2	0.5	0.0	1.0	1.0
x_3	0.5	0.1	0.2	0.6

$\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2$:

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.0	0.0	0.1	0.1
x_2	0.0	0.0	0.0	0.0
x_3	0.4	0.1	0.2	0.6

توجه کنید که اجتماع و اشتراک روابط فازی زمانی معنادار است که هر دو رابطه بر روی فضای حاصلضرب دکارتی یکسانی تعریف شده باشند. زمانیکه فضای حاصلضرب دو رابطه متفاوت هستند، این عملیات بی‌معنی بوده و بجای آن عملیات ترکیبی متفاوتی خواهیم داشت که بعداً به بررسی آن خواهیم پرداخت.

ترکیب روابط فازی

روابط فازی تعریف شده بر روی حاصلضربهای دکارتی متفاوت می‌توانند به روشهای مختلفی با یکدیگر ترکیب شوند.

$$\tilde{R}_1(x,y) \cap \tilde{R}_2(x,y) \rightarrow \tilde{R}_{new}(x,y)$$

$$\tilde{R}_1(x,y) \cup \tilde{R}_2(x,y) \rightarrow \tilde{R}_{new}(x,y)$$

$$\tilde{R}_1(x,y) composition \tilde{R}_2(y,z) \rightarrow \tilde{R}_{new}(x,z)$$

فصل چهارم
روابط فازی

درجه عضویت هر زوج (x,z) در رابطه جدید بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(x,z) = \vee_y \left[\mu_{\tilde{R}_1}(x,y) \wedge \mu_{\tilde{R}_2}(y,z)\right]$$

که در رابطه فوق نسبت به عنصر y که کرانه مشترک است بیشینه‌گری می‌شود.

چندین نوع ترکیب وجود دارد که متداولترین آنها در کاربردهای مهندسی، *ترکیب بیشینه کمینه* می‌باشد.

الف) ترکیب بیشینه – کمینه

در ترکیب بیشینه– کمینه دو رابطه فازی، از عملگرهای متداول مجموعه‌های فازی بیشینه $(\vee)$ و کمینه $(\wedge)$ استفاده می‌شود. دو رابطه فازی $\tilde{R}_1(x,y)$ و $\tilde{R}_2(y,z)$ که بترتیب بر روی حاصلضرب دکارتی $X \times Y$ و $Y \times Z$ تعریف شده‌اند را در نظر بگیرید. ترکیب بیشینه– کمینه $\tilde{R}_1$ و $\tilde{R}_2$ یک رابطه جدید $\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$ می‌باشد که بر روی $X \times Z$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2 = \int_{X \times Z} \vee_y \left[\mu_{\tilde{R}_1}(x,y) \wedge \mu_{\tilde{R}_2}(y,z)\right] / (x,z)$$

جائیکه علامت " $\circ$ " نشاندهنده ترکیب بیشینه– کمینه رابطه $\tilde{R}_1$ و $\tilde{R}_2$ است.

ترکیب بیشینه-کمینه

$\tilde{R}_1$(x,y):

x \ y	y_1= قدرت بدنی	y_2= تکنیک	y_3= دقت شوت	y_4= سرعت
x_1	0.9	0.2	0.1	0.5
x_2	0.7	0.8	0.5	0.6
x_3	0.4	0.9	0.8	0.7

$$min \rightarrow \{0.8,0.2,0.1,0.5\} \rightarrow max \rightarrow 0.8$$

$$min \rightarrow \{0.6,0.2,0.1,0.5\} \rightarrow max \rightarrow 0.6$$

$\tilde{R}_2$(y,z):

y \ z	z_1= قدرت تدافعی	z_2= قدرت تهاجمی
y_1= قدرت بدنی	0.8	0.6
y_2= تکنیک	0.3	0.8
y_3=دقت شوت	0.2	0.9
y_4= سرعت	0.5	0.7

$\tilde{R}_1$(x,y)°$\tilde{R}_2$(y,z)=

x \ z	z_1= قدرت تدافعی	z_2= قدرت تهاجمی
x_1	$\boxed{0.8}$	$\boxed{0.6}$
x_2	0.7	0.8
x_3	0.5	0.8

ترکیب بیشینه- ضرب

بنابراین، ترکیب بیشینه- ضرب دو رابطه $\tilde{R}_1$ و $\tilde{R}_2$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{R}_1.\tilde{R}_2 = \int_{X\times Z} \vee_y \left[\mu_{\tilde{R}_1}(x,y).\mu_{\tilde{R}_2}(y,z)\right]/(x,z)$$

$$\boxed{\mu_{\tilde{R}_1.\tilde{R}_2}(x,z) = \vee_y \left[\mu_{\tilde{R}_1}(x,y).\mu_{\tilde{R}_2}(y,z)\right]}$$

فصل چهارم

روابط فازی

ترکیب بیشینه-ضرب

$\tilde{R}_1$(x,y):

x \ y	y_1= قدرت بدنی	y_2= تکنیک	y_3= دقت شوت	y_4= سرعت
x_1	0.9	0.2	0.1	0.5
x_2	0.7	0.8	0.5	0.6
x_3	0.4	0.9	0.8	0.7

$$product \rightarrow \{0.72, 0.06, 0.02, 0.25\}$$
$$\rightarrow max = 0.72$$

$\tilde{R}_2$(y,z):

y \ z	z_1= قدرت تدافعی	z_2= قدرت تهاجمی
y_1= قدرت بدنی	0.8	0.6
y_2= تکنیک	0.3	0.8
y_3=دقت شوت	0.2	0.9
y_4= سرعت	0.5	0.7

$\tilde{R}_1$(x,y). $\tilde{R}_2$(y,z)=

x \ z	z_1= قدرت تدافعی	z_2= قدرت تهاجمی
x_1	0.72	0.36
x_2	0.56	0.64
x_3	0.35	0.72

ترکیب بیشینه- میانگین

$$\tilde{R}_1 <+> \tilde{R}_2 = \int_{X \times Z} \bigvee_y \left[\frac{1}{2}(\mu_{\tilde{R}_1}(x,y) + \mu_{\tilde{R}_2}(y,z)) \right] / (x,z)$$

جائیکه تابع عضویت آن بصورت زیر است:

$$\boxed{\mu_{\tilde{R}_1 <+> \tilde{R}_2}(x,z) = \bigvee_y \left[\frac{1}{2}(\mu_{\tilde{R}_1}(x,y) + \mu_{\tilde{R}_2}(y,z)) \right]}$$

ترکیب بیشینه-میانگین

$\tilde{R}_1$(x,y):

x \ y	y_1= قدرت بدنی	y_2= تکنیک	y_3= دقت شوت	y_4= سرعت
x_1	0.9	0.2	0.1	0.5
x_2	0.7	0.8	0.5	0.6
x_3	0.4	0.9	0.8	0.7

$$Average \rightarrow \left\{\frac{0.9+0.8}{2} = 0.85, 0.25, 0.15, 0.5\right\}$$

$$\rightarrow max = 0.85$$

$\tilde{R}_2$(y,z):

y \ z	z_1= قدرت تدافعی	z_2= قدرت تهاجمی
y_1= قدرت بدنی	0.8	0.6
y_2= تکنیک	0.3	0.8
y_3=دقت شوت	0.2	0.9
y_4= سرعت	0.5	0.7

$\tilde{R}_1$(x,y) <+> $\tilde{R}_2$(y,z)=

x \ z	z_1= قدرت تدافعی	z_2= قدرت تهاجمی
x_1	0.85	
x_2		
x_3		

ترکیب بیشینه – ستاره

می‌توان از ضرب، جمع و یا سایر عملگرهای دوتایی بجای کمینه (۸) استفاده نمود.

دو رابطه فازی $\tilde{R}_1$ و $\tilde{R}_2$ که بترتیب بر روی حاصلضرب دکارتی $X \times Y$ و $Y \times Z$ تعریف شده‌اند را در نظر بگیرید. ترکیب بیشینه- • روابط $\tilde{R}_1$ و $\tilde{R}_2$ یک رابطه جدید بصورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{R}_1 * \tilde{R}_2 = \int_{X \times Z} \vee_{y} \left[\mu_{\tilde{R}_1}(x,y) * \mu_{\tilde{R}_2}(y,z)\right] / (x,z)$$

$$\boxed{\mu_{\tilde{R}_1 * \tilde{R}_2}(x,z) = \vee_{y} \left[\mu_{\tilde{R}_1}(x,y) * \mu_{\tilde{R}_2}(y,z)\right]}$$

کوییز:

نشان دهید که آیا رابطه $\tilde{A} = \tilde{B} \times \left(\tilde{A} \div \tilde{B}\right)$ برقرار است یا خیر.

خاصیت متقارن – Symmetric

۱. یک رابطه فازی $\tilde{R}$ متقارن است اگر در آن، ترتیب حائز اهمیت نباشد یعنی بتوانیم x ها و y ها را جابجا نماییم. این خاصیت در تابع عضویت $\tilde{R}$، به شکل زیر نشان داده می‌شود:

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y)=\mu_{\tilde{R}}(y,x) \qquad \forall x,\, y \in X.$$

۲. $\tilde{R}$ پادمتقارن (Antisymmetric) است، اگر برای

$$\left.\begin{array}{lll} x \neq y & \text{either} & \mu_{\tilde{R}}(x,y) \neq \mu_{\tilde{R}}(y,x) \\ & \text{or} & \mu_{\tilde{R}}(x,y) = \mu_{\tilde{R}}(y,x) = 0 \end{array}\right\} \forall x, y \in X$$

۳. $\tilde{R}$ کاملا پادمتقارن (Perfectly Antisymmetric) است، اگر برای هر $x \neq y$

$$\boxed{\mu_{\tilde{R}}(x, y) > 0 \quad \text{then} \quad \mu_{\tilde{R}}(y, x) = 0 \; \forall x, y \in X}$$

۴. اگر برای **بعضی** از زوجهای (x,y) صادق نباشد، رابطه $\tilde{R}$ *نامتقارن* خوانده می‌شود. (Asymmetric)

$$\boxed{\mu_{\tilde{R}}(x,y) = \mu_{\tilde{R}}(y,x)}$$

$\tilde{R}_1$:

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	.4	0	.1	.8
x_2	.8	1	0	0
x_3	0	.6	.7	0
x_4	0	.2	0	0

$\tilde{R}_2$:

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	.4	0	.7	0
x_2	0	1	.9	.6
x_3	.8	.4	.7	.4
x_4	0	.1	0	0

$\tilde{R}_3$:

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	.4	.8	.1	.8
x_2	.8	1	.0	.2
x_3	.1	.6	.7	.1
x_4	0	.2	0	0

$\tilde{R}_4$:

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	.1	0	.1
x_2	.1	1	.2	.3
x_3	0	.2	.8	.8
x_4	.1	.3	.8	1

خاصیت بازتابی (Reflexive)

در نظر بگیرید که $\tilde{R}$ یک رابطه فازی بر روی حاصلضرب دکارتی $X \times X$ است.

۱. $\tilde{R}$ یک رابطه بازتابی است، اگر برای همه xهای متعلق به X رابطه زیر برقرار باشد.

$$\boxed{\mu_{\tilde{R}}(x, x) = 1 \ \forall x \in X}$$

۲. $\tilde{R}$ یک رابطه ε-بازتابی است، اگر $\boxed{\mu_{\tilde{R}}(x, x) \geq \varepsilon \ \forall x \in X}$

۳. $\tilde{R}$ یک رابطه بازتابی ضعیف است، اگر

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\mu_{\tilde{R}}(x, y) \leq \mu_{\tilde{R}}(x, x) \\ \mu_{\tilde{R}}(y, x) \leq \mu_{\tilde{R}}(x, x)\end{array}\right\} \forall x, y \in X.}$$

۴. $\tilde{R}$ یک رابطه غیربازتابی است، اگر حداقل برای یک x متعلق به X و نه برای همه آنها، رابطه زیر برقرار نباشد.

$$\boxed{\mu_{\tilde{R}}(x, x) = 1 \; \forall\, x \in X}$$

۵. $\tilde{R}$ یک رابطه پادبازتابی است، اگر رابطه بالا در مورد هیچ یک از xها برقرار نباشد.

$\tilde{R}_1$(x,x)	x_1	x_2	x_3
x_1	1	0.2	0.6
x_2	0.2	0.4	0.7
x_3	0.3	0.4	0.7

متقارن؟

پادمتقارن؟

کاملا پادمتقارن؟

نامتقارن؟

بازتابی؟

۰.۴–بازتابی؟

بازتابی ضعیف؟

غیربازتابی؟

پادبازتابی؟

خاصیت تراگذاری

رابطه فازی $\tilde{R}$ بر روی حاصلضرب دکارتی $X \times X$ تراگذار بیشینه-کمینه است اگر

$$\boxed{\tilde{R} \circ \tilde{R} \subseteq \tilde{R}}$$

$$\boxed{\mu_{\tilde{R}}(x, z) \geq \min\{\mu_{\tilde{R}}(x, y), \mu_{\tilde{R}}(y, z)\}} \quad \forall x, y, z \in X.$$

تراگذاری را می‌توان توسط سایر اپراتورها مانند ضرب (۰) بجای کمینه ($\wedge$) در رابطه فوق تعریف کرد. در این حالت، رابطه *تراگذاری* بیشینه- ضرب نامیده می‌شود.

$$
\tilde{R}: \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & .2 & 1 & .4 & .4 \\ x_2 & 0 & .6 & .3 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & .3 & 0 \\ x_4 & .1 & 1 & 1 & .1 \end{array}
\circ
\tilde{R}: \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & .2 & 1 & .4 & .4 \\ x_2 & 0 & .6 & .3 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & .3 & 0 \\ x_4 & .1 & 1 & 1 & .1 \end{array}
=
\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & .2 & .6 & .4 & .2 \\ x_2 & 0 & .6 & .3 & 0 \\ x_3 & 0 & .6 & .3 & 0 \\ x_4 & .1 & 1 & .3 & .1 \end{array}
$$

ترا گذار بیشینه – کمینه؟

$$\mu_{\tilde{R}\circ\tilde{R}}(x, y) \le \mu_{\tilde{R}}(x, y)$$

$$\boxed{\tilde{R} \circ \tilde{R} \subseteq \tilde{R}}$$

یک رابطه فازی که بازتابی و متقارن است را یک رابطه مجاور یا سازگار می‌نامند.

یک رابطه فازی متناظر با تعریف رابطه هم‌ارزی در حالت کلاسیک که بازتابی، متقارن و تراگذار باشد را یک رابطه مشابهت می‌نامند که توسعه یافته فازی خواص هم‌ارزی روابط قطعی می‌باشد.

$\tilde{R}_s$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1	.2	1	.6	.2	.6
x_2	.2	1	.2	.2	.8	.2
x_3	1	.2	1	.6	.2	.6
x_4	.6	.2	.6	1	.2	.8
x_5	.2	.8	.2	.2	1	.2
x_6	.6	.2	.6	.8	.2	1

اگر یک رابطه فازی بازتابی، تراگذار و پاد متقارن باشد، آن را یک ترتیب جزئی فازی می‌نامیم.

در نظر بگیرید که یک رابطه فازی $\tilde{R}$ بر روی حاصلضرب دکارتی $X \times Y$ تعریف شده است. در اینصورت داریم:

$$\tilde{R} = \{[(x, y), \mu_{\tilde{R}}(x, y)] \mid (x, y) \in X \times Y\}$$

آنگاه تصویرهای اول، دوم و تصویر کل آن که به مجموعه هـای فـازی سایه (Shadow) معروف هستند بصورت ذیل بدست می آیند.

الف) اولین تصویر $\tilde{R}$:

$$\tilde{R}^{(1)} = \{[x, \max_y \mu_{\tilde{R}}(x, y)] \mid (x, y) \in X \times Y\}$$

ب) دومین تصویر $\tilde{R}$:

$$\tilde{R}^{(2)} = \{[y, \max_x \mu_{\tilde{R}}(x, y)] \mid (x, y) \in X \times Y\}$$

ج) تصویر کلی $\tilde{R}$:

$$\tilde{R}^{(T)} = \max_x \max_y \{\mu_{\tilde{R}}(x, y) \mid (x, y) \in X \times Y\}$$

مثال فرض کنید رابطه $\tilde{R}$ یک رابطه فازی است که توسط ماتریس ذیل تعریف می شود. آنگاه تصویر اول، تصویر دوم و تصویر کلی این رابطه به شرح ذیل خواهد بود.

$$\tilde{R}^1 = \sum_X \mu_{\tilde{R}^1}(x_i)/x_i = 1/x_1 + 0.9/x_2 + 1/x_3$$

$$\tilde{R}^2 = \sum_Y \mu_{\tilde{R}^2}(y_i)/y_i = 0.5/y_1 + 0.9/y_2 + 1.0/y_3 + 0.9/y_4 + 1.0/y_5 + 0.6/y_6$$

رابطه فازی و تصاویر آن

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	$\mu_{\tilde{R}^1}(x)$
x_1	0.1	0.2	0.4	0.8	1.0	0.6	1.0
x_2	0.2	0.4	0.8	0.9	0.8	0.6	0.9
x_3	0.5	0.9	1.0	0.8	0.4	0.2	1.0
$\mu_{\tilde{R}^2}(y)$	0.5	0.9	1.0	0.9	1.0	0.6	1.0 $\mu_{\tilde{R}^T}$

در مقابل تصویر، *توسعه استوانه‌ای* قرار دارد. به کمک توسعه استوانه‌ای، از یک رابطه فازی تعریف شده در فضایی با ابعاد کوچک به یک رابطه فازی در فضایی با ابعاد بزرگتر می‌رویم. اگر رابطه $\tilde{R}$ در زیردنباله یک فضای ضرب $X = X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots \times X_n$ تعریف شود، آن را $X_{i_1} \times X_{i_2} \times X_{i_3} \times \ldots \times X_{i_k}$ می‌نامیم و توسعه استوانه‌ای $\tilde{R}$، به شکل $CE(\tilde{R})$ نمایش داده شده و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$CE(\tilde{R}) = \int_{X_1 \times \ldots \times X_n} \mu_{\tilde{R}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) / (x_1, \ldots, x_n)$$

توجه داشته باشید که اگرچه توسعه استوانه‌ای از تصویر ثانویه ($\tilde{R}^2$)، رابطه‌ای با ابعاد بزرگتر را نتیجه می‌دهد ولی رابطه اصلی $\tilde{R}$ بدست نخواهد آمد چراکه پاره‌ای از اطلاعات به هنگام عملیات توسعه استوانه‌ای از بین رفته‌اند.

حال به توسعه استوانه‌ای تصویر ثانویه می‌پردازیم. توسعه استوانه‌ای، به نوعی روشی در تقابل با روش تصویر است. بنابراین، انتظار داریم رابطه‌ای بر روی $X \times Y$ بدست آوریم که تا حدی شبیه به رابطه اصلی $\tilde{R}$ باشد. چنانچه رابطه فوق نشان می‌دهد، تصویر ثانویه بر روی مجموعه مرجع Y تعریف می‌شود.

$CE(\tilde{R}^2)$:

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	0.5	0.9	1.0	0.9	1.0	0.6
x_2	0.5	0.9	1.0	0.9	1.0	0.6
x_3	0.5	0.9	1.0	0.9	1.0	0.6

$$\tilde{R}^2 = \sum_{Y} \mu_{\tilde{R}^2}(y_i)/y_i = 0.5/y_1 + 0.9/y_2 + 1.0/y_3 + 0.9/y_4 + 1.0/y_5 + 0.6/y_6$$

فصل چهارم

روابط فازی

توابع فازی روی مجموعه های فازی

تابع فازی تعمیم مفهوم تابع کلاسیک است.

تابع کلاسیک f یک نگاشت از دامنه D به فضای S است ؛ $f(D) \subseteq S$ برد f نامیده می شود.

ویژگیهای مختلف مفهوم کلاسیک یک تابع را می توان مبهم و فازی در نظر گرفت.

بنابراین "درجات" مختلفی از فازیسازی مفهوم کلاسیک یک تابع قابل تصور است.

فصل چهارم

روابط فازی　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　توابع فازی روی مجموعه های فازی

۱- می توان از یک مجموعه فازی، نگاشت قطعی تهیه کرد که در امتداد فازی دامنه باشد و بنابراین یک مجموعه فازی ایجاد کند.

۲. خود نگاشت می تواند فازی باشد.

۳. توابع معمولی می توانند خصوصیات فازی داشته باشند یا توسط قیدهای فازی محدود شوند.

تعریف ۱.

تابع کلاسیک $f: X \to Y$ یک نگاشت از دامنه فازی $\tilde{A}$ در X به برد فازی $\tilde{B}$ در Y است؛ اگر:

$$\boxed{\forall x \in X, \mu_{\tilde{B}}(f(x)) \geq \mu_{\tilde{A}}(x)}$$

- ✓ فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ مجموعه های فازی باشند و $\tilde{R}$ نشان دهنده رابطه بین $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ باشد. رابطه $\tilde{R}$ می تواند توسط تابعی مانند f بیان شود.

$$x \in \tilde{A}, y \in \tilde{B}$$

$$y = f(x) \quad or \quad x = f^{-1}(y)$$

- ✓ با توجه به تابع کلاسیک $f: X \to Y$ و دامنه فازی $\tilde{A}$ در X، اصل توسعه برد فازی $\tilde{B}$ را با تابع عضویت زیر ایجاد می کند.

$$\boxed{\mu_{\tilde{B}}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_{\tilde{A}}(x)}$$

- ✓ از این رو f مطابق تعریف ۱ یک تابع است.

اصل توسعه:

- فرض کنید f تابعی است از x به y یعنی y=f(x) . بعلاوه فرض کنید $\tilde{A}$ مجموعه ای است فازی روی x.

$$\tilde{A} = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \cdots + \mu_A(x_n)/x_n$$

- اصل توسعه بیان میکند که نگاشت $\tilde{A}$ تحت تابع f به مجموعه فازی $\tilde{B}$ تبدیل خواهد شد به طوریکه $y_i=f(x_i)$ و

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}) = \{(f(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_1)), (f(x_2), \mu_{\tilde{A}}(x_2)), \ldots, (f(x_n), \mu_{\tilde{A}}(x_n))\}$$

اصل توسعه:

بعلاوه اگر نگاشت دو x متفاوت یک y یکسان باشد برای بیان درجه عضویت از ماکزیمم درجه عضویت دو x استفاده میکنیم:

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \max_{x=f^{-1}(y)} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

$$\tilde{A} = 0.1/-2 + 0.4/-1 + 0.8/0 + 0.9/1 + 0.3/2$$

$$f(x) = x^2 - 3.$$

$$\begin{aligned}\tilde{B} &= 0.1/1 + 0.4/-2 + 0.8/-3 + 0.9/-2 + 0.3/1 \\ &= 0.8/-3 + (0.4 \vee 0.9)/-2 + (0.1 \vee 0.3)/1 \\ &= 0.8/-3 + 0.9/-2 + 0.3/1,\end{aligned}$$

اصل توسعه:

حال اگر در حالت کلی تابع f نگاشتی از فضای n بعدی $X_1,...X_n$ به فضای تک بعدی y باشد آنگاه میزان عضویت y در مجموعه فازی $\tilde{B}$ به اندازه کمترین میزان عضویت X_i در مجموعه های فازی A_i است.

$$\tilde{B} = \{(y,\ \mu_{\tilde{B}}(y)) \mid y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X\}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \max\limits_{(x_1,\ldots,x_n)=f^{-1}(y)} [\min_i \ \mu_{A_i}(x_i)], & \text{if } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \text{if } f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

اصل توسعه:

مثال:

$X_1 = \{-1, 0, 1\}$ $A_1 = 0.5/{-1} + 0.1/0 + 0.9/1$

$X_2 = \{-2, 2\}$ $A_2 = 0.4/{-2} + 1/2$

$y = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2.$ $B = f(A_1, A_2)$

x_1	$\mu_{A1}(x_1)$	x_2	$\mu_{A2}(x_2)$	$\mu_{A1xA2}(x_1, x_2)$	$y = x_1^2+x_2$	$\mu_B(y)$
-1	0.5	-2	0.4	0.4	-1	0.4
-1	0.5	2	1	0.5	3	0.9
0	0.1	-2	0.4	0.1	-2	0.1
0	0.1	2	1	0.1	2	0.1
1	0.9	-2	0.4	0.4	-1	0.4
1	0.9	2	1	0.9	3	0.9

تعریف ۲.

فرض کنید X و Y مجموعه های مرجع باشند و $\tilde{P}(y)$ مجموعه تمام مجموعه های فازی در Y باشد.

$$\tilde{f}: X \rightarrow \tilde{P}(Y) \text{ is a mapping}$$
$$\tilde{f} \text{ is a } \textit{fuzzy function} \text{ iff}$$
$$\mu_{\tilde{f}(x)}(y) = \mu_{\tilde{R}}(x, y), \forall (x, y) \in X \times Y$$

که در آن $\mu_{\tilde{R}}(x, y)$ تابع عضویت یک رابطه فازی است.

مثال:

الف) فرض کنید X مجموعه ای از تمام کارگران یک کارخانه، $\tilde{f}$ خروجی روزانه و y تعداد قطعات پردازش شده باشد.

یک تابع فازی می تواند به صورت $\boxed{\tilde{f}(x) = y}$ باشد.

ب)

$$\boxed{\begin{array}{l} \tilde{a}, \tilde{b} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}) \\ X = \mathbb{R} \\ \tilde{f}: x \to \tilde{a}x \oplus \tilde{b} \text{ is a fuzzy function.} \end{array}}$$

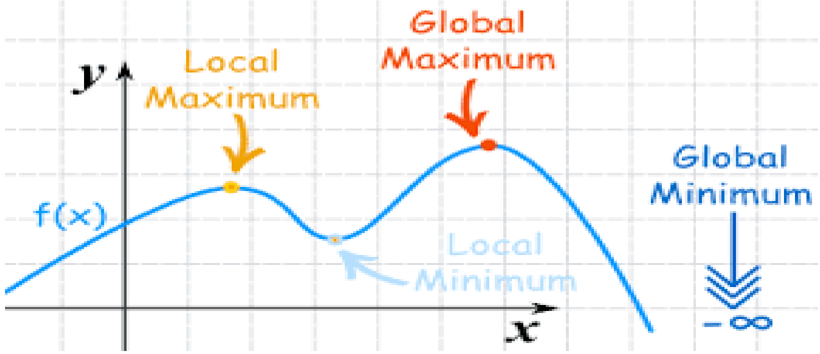
یک رابطه فازی برای "x مشابه y" روی مجموعه‌های مرجع {1,2,3,4}=X {0,1,2,3}=Y مشخص کنید.

خواص بازتابی و تقارنی را برای رابطه نوشته شده خود اثبات کنید.

به طور سنتی، اکسترمم (حداکثر یا حداقل) یک تابع قطعی f در دامنه داده شده D، در یک نقطه دقیق x_0 حاصل می شود.

اگر تابع f تابع هدف یک مدل تصمیم گیری باشد، به نقطه x_0 که تابع در آن بهینه می شود، تصمیم بهینه گفته می شود.

یعنی، در نظریه کلاسیک تقریبا رابطه ای منحصر به فرد بین اکسترمم تابع هدف و مفهوم تصمیم بهینه از یک مدل تصمیم گیری وجود دارد.



در مدلهایی که فازی در آن دخیل است، این رابطه منحصر به فرد دیگر وجود ندارد.

اکسترمم یک تابع یا مقدار بهینه یک مدل تصمیمگیری را می توان به روشهای مختلفی تفسیر کرد:

در مدلهای تصمیم گیری "تصمیم بهینه" اغلب بعنوان مجموعه ای قطعی در نظر گرفته می شود، D_m؛ که شامل آن عناصر "تصمیم" مجموعه فازی است که حداکثر درجه عضویت را کسب می کند.

مفهوم "تصمیم بهینه" همانطور که در بالا ذکر شد با مفهوم "مجموعه حداکثر" هنگام بررسی توابع به طور کلی مطابقت دارد.

تعریف ۳.

فرض کنید f یک تابع با ارزش واقعی در X باشد و اجازه دهید f از پایین با $\inf(f)$ و از بالا با $\sup(f)$ محدود شود. مجموعه

فازی $\tilde{M} = \{(x, \mu_{\tilde{M}}(x)), x \in X\}$ با

$$\mu_{\tilde{M}}(x) = \frac{f(x) - \inf(f)}{\sup(f) - \inf(f)}$$

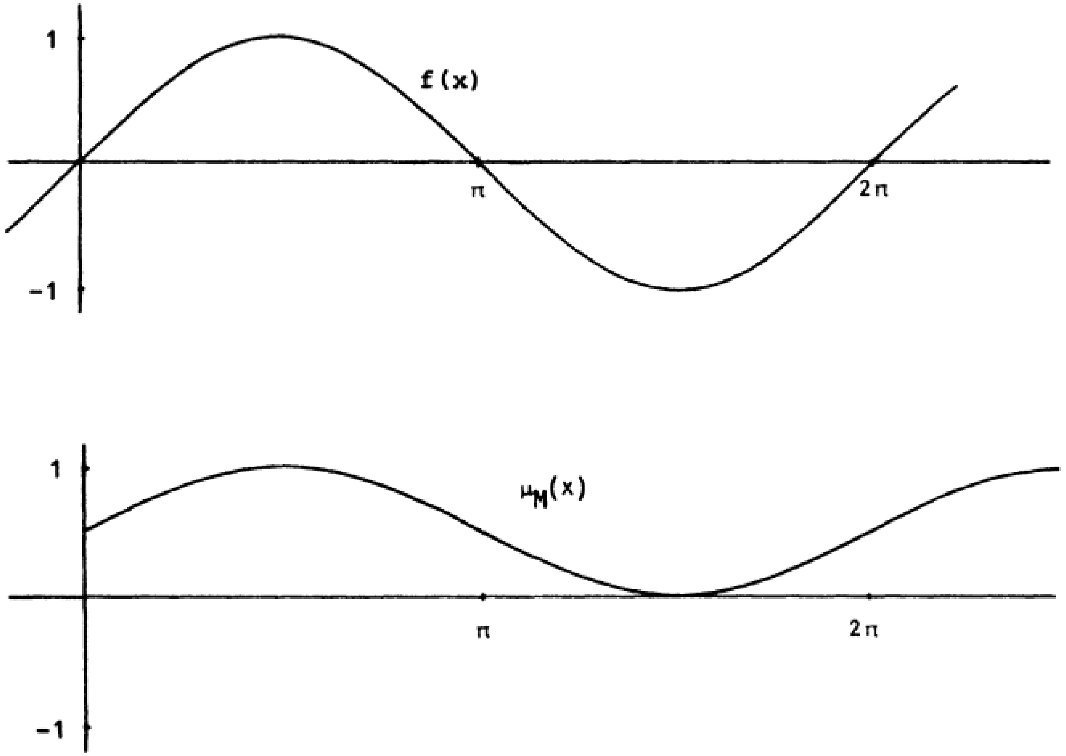
مجموعه حداکثر نامیده می شود.

مثال

$$f(x) = \sin x$$

$$\mu_{\tilde{M}}(x) = \frac{\sin x - \inf(\sin)}{\sup(\sin) - \inf(\sin)} = \frac{\sin x - (-1)}{1-(-1)}$$

$$= \frac{\sin x + 1}{2} = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}$$



Maximizing set.

در **تعریف ۳**، f یک تابع با ارزش واقعی قطعی است، شبیه به تابع عضویت "تصمیم" مجموعه فازی، و مجموعه حداکثرسازی اطلاعاتی را در مورد همسایگی اکسترمم تابع f ارائه می دهد و دامنه آن نیز قطعی است.

بیایید اکنون اکسترمم توابع فازی را با توجه به **تعریف ۲**، که در یک دامنه قطعی تعریف می شوند، بررسی کنیم:

از آنجا که تابع فازی $f(x)$ یک مجموعه فازی است، مثلاً در $\mathbb{R}$، مقدار ماکسیمم به طور کلی یک نقطه در $\mathbb{R}$ نخواهد بود بلکه یک مجموعه فازی خواهد بود، که ما آن را "ماکسیمم فازی $f(x)$ " می نامیم.

یک روش ساده این است که یک عملگر بیشینه/ماکسیمم توسعه یافته را به صورت مشابه با سایر عملگرهای توسعه یافته تعریف شده در فصل ۳ تعریف کنید.

بیشینه یا کمینه n عدد فازی، که با $\widetilde{min}(\widetilde{M}_1, \ldots, \widetilde{M}_n)$ و $\widetilde{max}(\widetilde{M}_1, \ldots, \widetilde{M}_n)$ به ترتیب نشان داده می شوند، دوباره یک عدد فازی است.

تعریف ٤

فرض کنید $\tilde{f}(X)$ یک تابع فازی از X به $\mathbb{R}$ باشد، که در یک دامنه محدود و قطعی D تعریف شده باشد.

آنگاه ***بیشینه فازی*** $\tilde{f}(X)$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$\tilde{M} = \max_{x \in D} \tilde{f}(x) = \{(\sup \tilde{f}(x), \mu_{\tilde{M}}(x)) \mid x \in D\}$$

For $|D| = n$, the membership function of $\tilde{\max}\, \tilde{f}(x)$ is given by

$$\mu_{\tilde{M}}(x) = \min_{j=1,\dots,n} \mu_{\tilde{f}(x_j)}(\tilde{f}(x_j)), \quad f(x) \in D$$

مثال

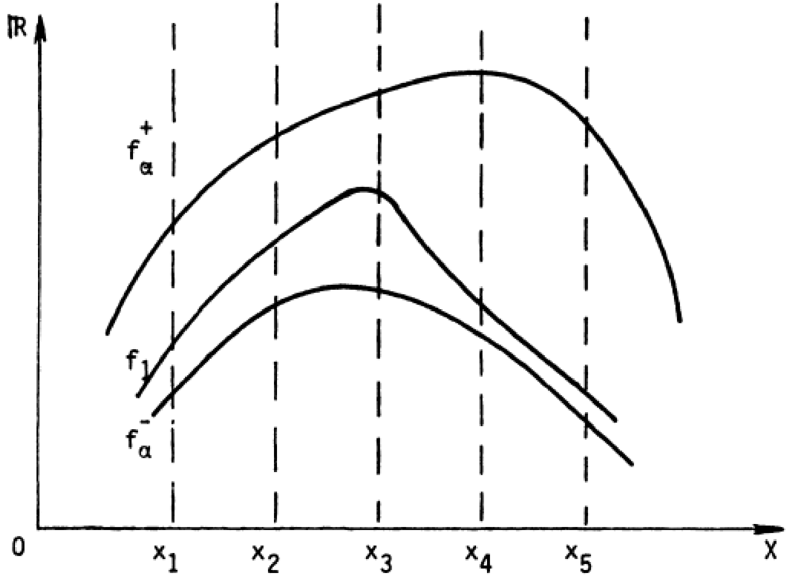
فرض کنید $\tilde{f}(X)$ یک تابع فازی از$\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ باشد، به گونه ای برای هر x، $\tilde{f}(X)$ یک عدد فازی مثلثی است.

دامنه D برابر است با $D=\{x_1,x_2, x_3, x_4, x_5\}$.

شکل زیر با نشان دادن "منحنیهای سطح" دامنه D از $\tilde{f}(X)$ چنین تابعی را ترسیم می کند:

f_1 منحنی است که برای آن $\mu_{\tilde{f}(x)}(f_1(x)) = 1$، و برای f_α^+ و f_α^-، به ترتیب:

$$\mu_{\tilde{f}(x)}(f_\alpha^-(x))=\mu_{\tilde{f}(x)}(f_\alpha^+(x))=\alpha$$



A fuzzy function.

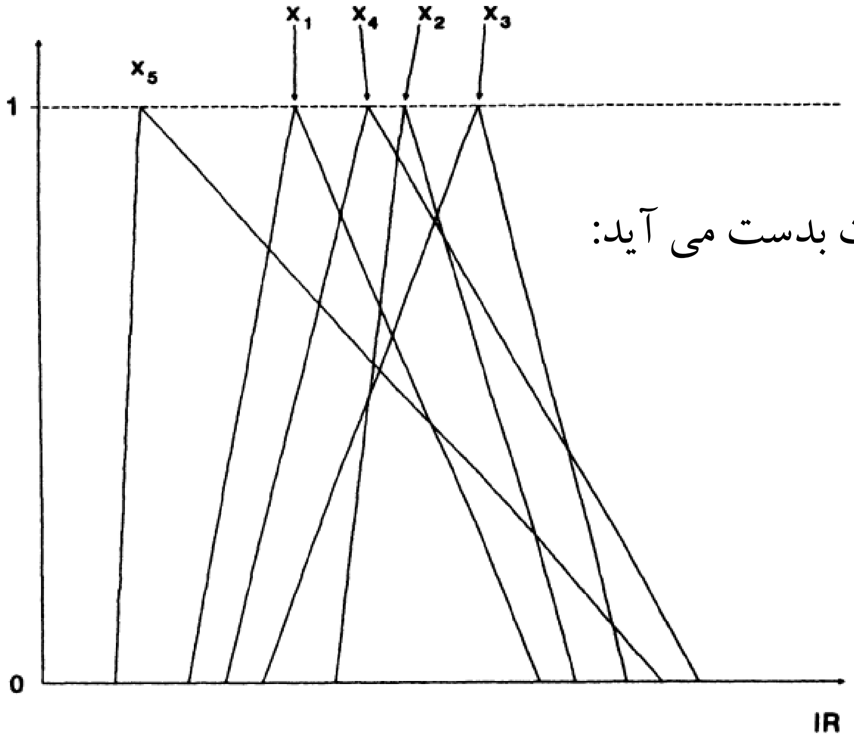
اعداد فازی مثلثی نشان دهنده تابع $\tilde{f}(X)$ در x_5 ,x_4 ,x_3 ,x_2,x_1 =X است که در شکل زیرنشان داده شده است.

ما می توانیم مشاهدات زیر را انجام دهیم:

از آنجا که منحنیهای سطح در شکل قبل با هم موازی نیستند، ماکسیمم آنها در x_i های متفاوت بدست می آید:

$$\max f_\alpha^+(x) = f_\alpha^+(x_4), \max f_1(x) = f_1(x_3), \max f_\alpha^-(x) = f_\alpha^-(x_2)$$

بنابراین x_1 و x_5 قطعاً متعلق به ماکسیمم $f(x)$ نیستند.



Triangular fuzzy numbers representing a fuzzy function.

ما به راحتی می توانیم مجموعه فازی " بیشینه $\tilde{f}(X)$ " را که در **تعریف ٤** بیان شده است، با نگاه کردن به شکل زیر و مشاهده آن، برای

$$\alpha \in [0, \alpha^-]: f^-(x_2) \geq f_\alpha^-(x_i)\ \forall i$$
$$\alpha \in [\alpha^-, 1]: f^-(x_3) \geq f_\alpha^-(x_i)\ \forall i$$
$$\alpha \in [\alpha^+, 1]: f^+(x_3) \geq f_\alpha^+(x_i)\ \forall i$$
$$\alpha \in [0, \alpha^+]: f^+(x_4) \geq f_\alpha^+(x_i)\ \forall i$$

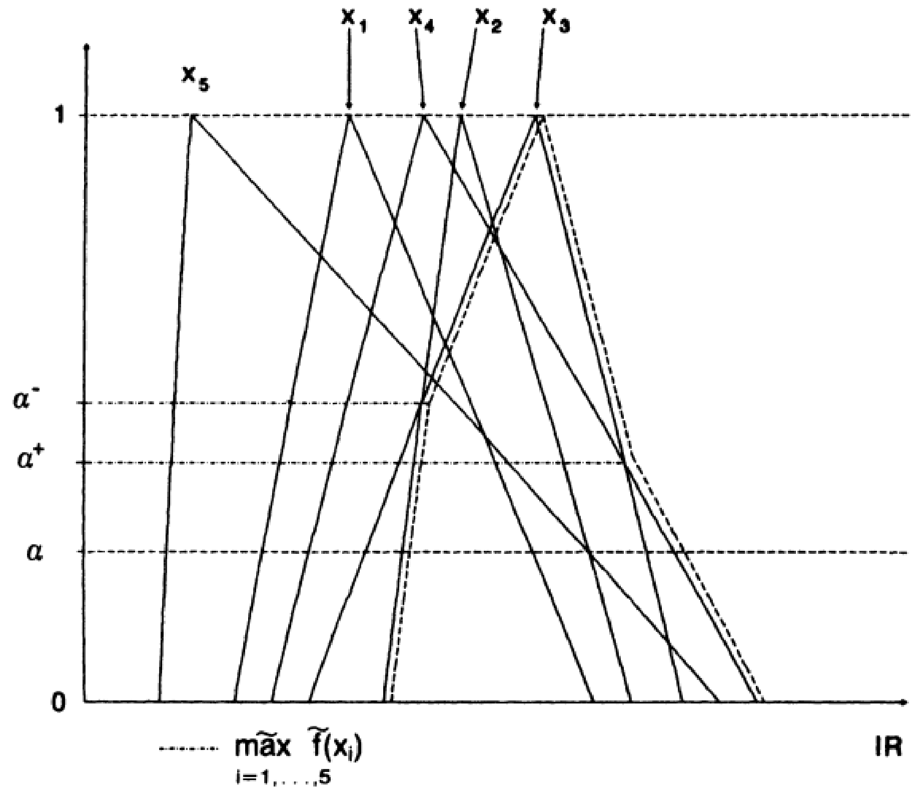
تعیین کنیم.

با α^- و α^+ به گونه ای که $f_\alpha^-(x_2) = f_\alpha^-(x_3)$ و $f_\alpha^+(x_4) = f_\alpha^+(x_3)$.

بنابراین، بیشینه $\tilde{f}(X)$ برابر است با:

$$\tilde{M} = \{(x_2, \alpha^-), (x_3, 1), (x_4, \alpha^+)\}$$

این مجموعه در شکل با خط چین نشان داده شده است.



The maximum of a fuzzy function.

پیشنهادهای کاملاً متفاوتی برای تعریف انتگرال های فازی، انتگرال های توابع فازی و انتگرال های توابع قطعی در دامنه های فازی ارائه شده است.

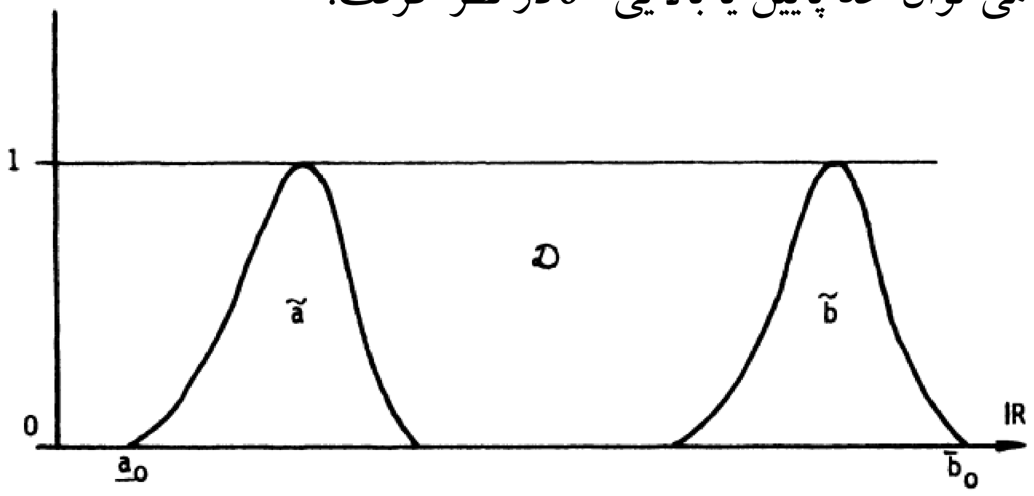
الف) انتگرال یک تابع قطعی در یک فاصله فازی

یک دامنه فازی $\mathcal{F}$؛ از $\mathbb{R}$ فرض می شود که توسط دو مجموعه فازی محدب و نرمال محدود شده باشد، توابع عضویت به ترتیب $\mu_{\tilde{a}}(x)$ و $\mu_{\tilde{b}}(x)$ هستند.

$\mu_{\tilde{a}}(x)$ و $\mu_{\tilde{b}}(x)$ را می توان به عنوان درجاتی (از اطمینان) تفسیر کرد که x را می توان حد پایین یا بالایی $\mathcal{F}$ در نظر گرفت.
اگر $\underline{a}_\circ$ و $\bar{b}_\circ$ حدود پایین و بالای پشتیبانی $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ باشند، آنگاه $\underline{a}_\circ$ و $\bar{b}_\circ$ با

$$\underline{a}_0 = \inf S(\tilde{a}) \leq \sup S(\tilde{b}) = \bar{b}_0.$$

به یکدیگر مرتبط هستند.



Fuzzily bounded interval.

تعریف ٦.

فرض کنید f یک تابع با ارزش واقعی باشد که در فاصله $J = [a_0,b_0]$قابل انتگرال گیری باشد.

سپس طبق اصل توسعه، تابع عضویت انتگرال $\int_F f$ توسط داده می شود:

$$\mu_{\int_{\mathcal{F}} f}(z) = \sup_{x,y \in J} \min(\mu_{\bar{a}}(x), \mu_{\bar{b}}(y))$$

$$z = \int_x^y f$$

انتگرال توابع فازی

$$\tilde{a} = \{(4, .8), (5, 1), (6, .4)\}$$
$$\tilde{b} = \{(6, .7), (7, 1), (8, .2)\}$$
$$f(x) = 2, \quad x \in [a_0, b_0] = [4, 8]$$

$$\int_{\tilde{\mathcal{D}}} f(x)\, dx = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} 2dx = 2x \,|_{\tilde{a}}^{\tilde{b}}$$

(a, b)	$\int_a^b 2dx$	$\min(\mu_x(a), \mu_x(b))$
(4, 6)	4	.7
(4, 7)	6	.8
(4, 8)	8	.2
(5, 6)	2	.7
(5, 7)	4	1.0
(5, 8)	6	.2
(6, 6)	0	.4
(6, 7)	2	.4
(6, 8)	4	.2

$$\int_{\tilde{\mathcal{D}}} f = \{(0, .4), (2, .7), (4, 1), (6, .8), (8, .2)\}$$

ب) انتگرال یک تابع فازی در یک فاصله قطعی

اکنون ما تابع فازی $\tilde{f}$ را، مطابق **تعریف ۲** در نظر خواهیم گرفت؛ که باید در فاصله قطعی $[a,b]$ انتگرال بگیریم.

فرض بر این است که تابع فازی $\tilde{f}(X)$ یک عدد فازی باشد، یعنی یک مجموعه فازی نرمال محدب پیوسته قطعه ای در $\mathbb{R}$.

فرض خواهیم کرد که منحنی های α-level، $\mu_{\tilde{f}(x)}(y)=\alpha$ برای همه $\alpha\in[0,1]$ و α و x به عنوان پارامترها، دقیقاً دو جواب پیوسته دارند، $y=f_{\alpha}^{+}(x)$ و $y=f_{\alpha}^{-}(x)$ ، برای $\alpha\neq 1$ و برای $\alpha=1$ یک جواب دارند.

اکنون می توان انتگرال $\tilde{I}(a,b)$ از $\tilde{f}(X)$ را در $[a,b]$ به عنوان یک مجموعه فازی تعریف کرد که در آن درجه عضویت α به انتگرال هر منحنی سطح- α از $\tilde{f}(X)$ در $[a,b]$ اختصاص داده می شود.

تعریف ۵.

فرض کنید $\tilde{f}(X)$ یک تابع فازی از $[a,b] \in \mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ است؛ به گونه ای که $\forall x \in [a,b]$ ، $\tilde{f}(X)$ یک عدد فازی است و $f_\alpha^+(x)$ و $f_\alpha^-(x)$ منحنی های سطح- α می باشند.

انتگرال $\tilde{f}(X)$ در $[a,b]$ به عنوان مجموعه ای فازی تعریف می شود

$$\tilde{I}(a,b) = \left\{ \left(\int_a^b f_\alpha^-(x)\,dx + \int_a^b f_\alpha^+(x)\,dx, \alpha \right) \right\}$$

این تعریف با اصل توسعه یعنی $\mu_{\int_a^b f}(y)=\sup_{\substack{g\in y\\ y=\int_a^b g}}\inf_{x\in[a,b]}\mu_{f(x)}(g(x)),\quad y\in\mathbb{R}$ مطابقت دارد.

جاییکه $y=\{g:[a,b]\to\mathbb{R}\mid g\ integrable\}$

اگر فرض شود که تابع فازی از نوع LR باشد، تعیین انتگرال $\tilde{I}(a,b)$ تا حدی آسان می شود. بنابراین ما فرض می کنیم که

$\tilde{f}(X)=(f(x),s(x),t(x))_{LR}$ یک عدد فازی در نمایش LR برای تمام $x\in[a,b]$ می باشد.

f، s و t به عنوان توابع قابل انتگرال گیری مثبت در $[a,b]$ فرض می شوند.

Dubois and Prade نشان دادند که تحت این شرایط $\tilde{I}(a,b)=\left(\int_a^b f(x)dx,\int_a^b s(x)dx,\int_a^b t(x)dx\right)_{LR}$

سپس کافی است که مقدار متوسط و توابع پخش $\tilde{f}(X)$ را بر روی $[a,b]$ انتگرال بگیریم و نتیجه دوباره یک عدد فازی LR خواهد بود.

مثال:

تابع فازی $\tilde{f}(X) = (f(x),s(x),t(x))_{LR}$ را با تابع متوسط $f(x)=x^2$ و توابع پخش $s(x) = \frac{x}{4}$ و

$$t(x) = \frac{x}{2}$$

$$L(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$R(x) = \frac{1}{1+2|x|}$$

در نظر بگیرید. انتگرال را از a = 1 تا b = 4 تعیین کنید، یعنی $\int_1^4 f$ را محاسبه کنید.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_1^4 x^2\,dx = 21$$

$$\int_a^b s(x)dx = \int_1^4 \frac{x}{4}dx = 1.875$$

$$\int_a^b t(x)dx = \int_1^4 \frac{x}{2}dx = 3.75$$

با توجه به فرمول فوق،

این عدد فازی $\tilde{I}(a,b) = (21,1.875,3.75)_{LR}$ مقدار انتگرال فازی را ارائه می دهد.

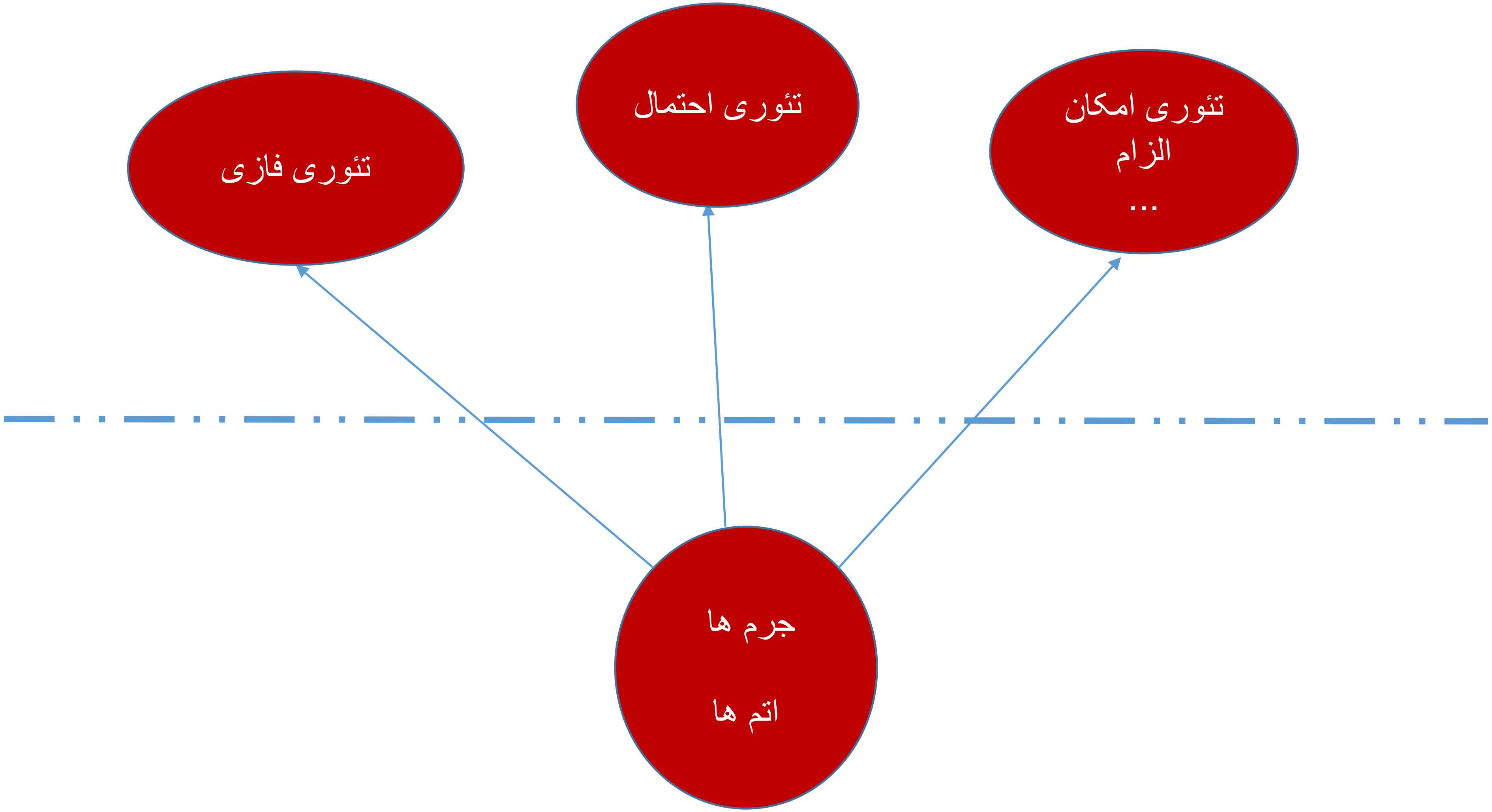
فصل پنجم

پیمانه های فازی

پیمانه های فازی (Fuzzy Measure):

روشهای سنجش انواع عدم قطعیت می باشند.

همه عدم قطعیت های جهان یکسان نیستند و تئوری های متفاوتی آنها را می سنجند که به آن پیمانه گویند.


تئوری فازی
تئوری احتمال
تئوری امکان
الزام
...
جرم ها
اتم ها

مثال فرض کنید که اخیراً یک نقاشی قدیمی که بطور عجیبی به نقاشیهای آثار رافائل شبیه است، کشف شده است. چنین کشفی احتمالاً سؤالات مختلفی را در ارتباط با نقاشی مطرح می‌نماید. ۳ سوال زیر را در نظر بگیرید:

۱) آیا نقاشی کشف شده نسخه اصلی نقاشی رافائل می‌باشد؟

۲) آیا نقاشی کشف شده اثر یکی از شاگردان رافائل می‌باشد؟

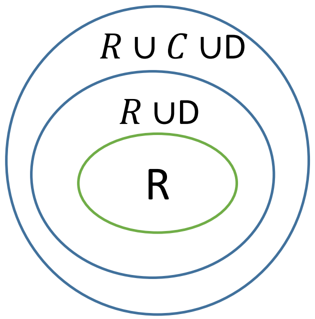
۳) آیا نقاشی کشف شده جعلی است؟

فرض کنید R ، D و C زیرمجموعه‌های مجموعه مرجع X را نمایش دهند، یعنی بترتیب مجموعه همه نقاشیهایی که شامل نقاشهای رافائل، نقاشیهای شاگردان رافائل و تمام نقاشیهای جعل شده رافائل باشند.

$g : P(x) \to [0,1]$

$\{R, D, C\}$

$2^3 = 8$



عناصر کانونی	m_1	m_2	m_3	m_4
R	0.05	0	0.33	1
D	0	0	0.33	0
C	0.05	0	0.33	0
RUD	0.15	0	0	0
RUC	0.1	0	0	0
DUC	0.05	0	0	0
RUCUD	0.6	1	0	0
جمع	1	1	1	1

$$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$$

درجه باور یا تصدیق ما را نسبت به اینکه عضوی متعلق به A (و نه زیرمجموعه‌های آن) است مشخص می‌کند.

$$Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B)$$

$Pl(A)$ نه تنها کل باور یا شهود ما را در مورد این که عضوی متعلق به مجموعه A یا هر زیرمجموعه A است در نظر می‌گیرد، بلکه باور یا شهود اضافی در ارتباط با مجموعه‌هایی که با A اشتراک داشته باشند را نیز لحاظ می‌کند.

$$Pl(R \cup D) = \sum_{B \cap (R \cup D) \neq \emptyset} m(B) = m(R) + m(R \cup D) + m(R \cup C) + m(R \cup C \cup D) + m(D) + m(D \cup C) =$$

0.05 + 0.15 + 0.1 + 0.6 + 0 +0.05= 0.95

پیمانه های فازی

پیمانه های باور و موجه نمائی

$$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$$

$$Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B)$$

عناصر کانونی	m_1	Bel	PL
R	0.05	0.05	0.9
D	0	0	0.8
C	0.05	0.05	0.8
RUD	0.15	0.2	0.95
RUC	0.1	0.2	1
DUC	0.05	0.1	0.95
RUCUD	0.6	1	1

$$Pl(A) \geq Bel \ ; \forall A \in P(X)$$

$$Bel(R \cup D) = \sum_{B \subseteq R \cup D} m(B) = m(R) + m(D) + m(R \cup D) = 0.05 + 0 + 0.15 = 0.2$$

$$Pl(R) = \sum_{B \cap R \neq \emptyset} m(B) = m(R) + m(R \cup D) + m(R \cup C) + m(R \cup C \cup D) = 0.05 + 0.15 + 0.1 + 0.6 = 0.9$$

$$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$$

$$Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B)$$

عناصر کانونی	$\boldsymbol{m_2}$	$\boldsymbol{Bel}$	$\boldsymbol{PL}$
R	0	0	1
D	0	0	1
C	0	0	1
RUD	0	0	1
RUC	0	0	1
DUC	0	0	1
RUCUD	1	1	1

$$\boxed{Bel(A) = Pl(A)}$$

پیمانه های احتمالی

عناصر کانونی	m_3	Bel	PL
R	0.33	0.33	0.33
D	0.33	0.33	0.33
C	0.33	0.33	0.33
RUD	0	0.66	0.66
RUC	0	0.66	0.66
DUC	0	0.66	0.66
RUCUD	0	1	1

$$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$$

$$Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B)$$

فصل پنجم
پیمانه های فازی
پیمانه های باور و موجه نمائی

یک مجموعه از زیرمجموعه‌های یک مجموعه مرجع، تودرتو یا آشیانه‌ای هستند اگر این زیرمجموعه‌ها بگونه‌ای مرتب شوند که هریک بَعدی را شامل شود، بعبارتی:

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n$$

مجموعه‌های تودرتو می‌باشند.

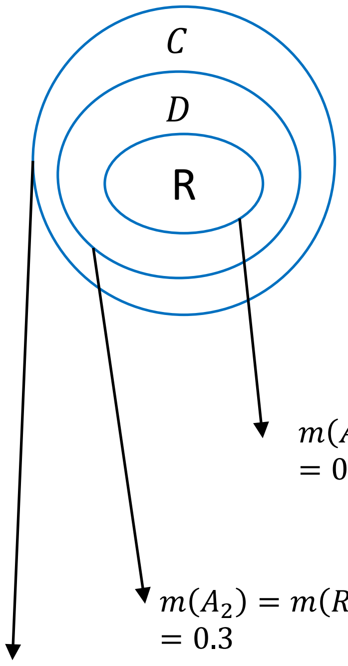
پیمانه الزام

پیمانه امکان

$$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$$

$$Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B)$$

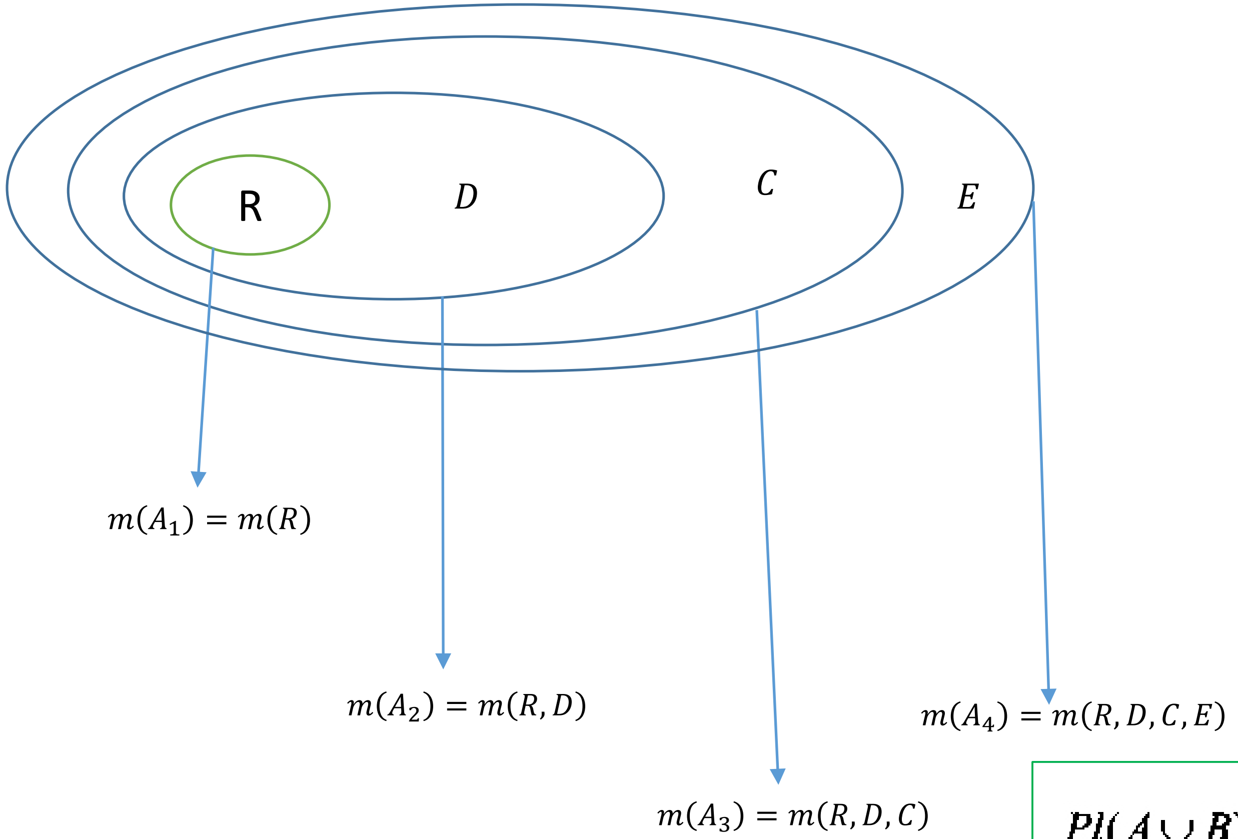
عناصر کانونی	m_4	Bel	PL
R	0.2	0.2	1
D	0	0	0.8
C	0	0	0.5
RUD	0.3	0.5	1
RUC	0	0.2	1
DUC	0	0	0.8
RUCUD	0.5	1	1



$m(A_1) = m(R) = 0.2$

$m(A_2) = m(R, D) = 0.3$

$m(A_3) = m(R, c, D) = 0.5$



$$1)\ Bel(A \cap B) = \min\{Bel(A), Bel(B)\} \ ;\forall A, B \in P(X)$$

$$2)\ Pl(A \cup B) = \max\{Pl(A), Pl(B)\} \ ;\forall A, B \in P(X)$$

$$\text{Bel}(A_1) = m(A_1)$$
$$\text{Bel}(A_2) = m(A_1) + m(A_2)$$
$$\text{Bel}(A_3) = m(A_1) + m(A_2) + m(A_3)$$
$$\text{Bel}(A_4) = m(A_1) + m(A_2) + m(A_3) + m(A_4)$$

$$\text{Bel}(A_1 \cap A_2) = m(A_1) = \min\{\text{Bel}(A_1), Bel(A_2)\} = \text{Bel}(A_1)$$

$$\text{Bel}(A_2 \cap A_4) = m(A_1) + m(A_2) = \min\{\text{Bel}(A_2), Bel(A_4)\} = \text{Bel}(A_2)$$

$$Pl(A) = 1 - Bel(\not\subset A)$$

$$\begin{aligned} Pl(A \cup B) &= 1 - Bel(\not\subset (A \cup B)) = 1 - Bel((\not\subset A) \cap (\not\subset B)) \\ &= 1 - \min\{Bel(\not\subset A), Bel(\not\subset B)\} = \max\{1 - Bel(\not\subset A), 1 - Bel(\not\subset B)\} \\ &= \max\{Pl(A), Pl(B)\} \ ;\forall A, B \in P(X) \end{aligned}$$

$$\eta(A \cap B) = \min\{\eta(A), \eta(B)\}$$

$$\pi(A \cup B) = \max\{\pi(A), \pi(B)\}$$

پیمانه‌های الزام و امکان توسط رابطه زیر به یکدیگر مربوط می‌شوند:

$$\eta(A) = 1 - \pi(\not\subset A) \; ;\forall A \in P(X)$$

هر پیمانه امکان π بر روی $P(X)$ می‌تواند توسط یک تابع توزیع امکان تعیین گردد:

$$r : X \to [0,1]$$

و از طریق رابطه زیر نشان داده شود:

$$\pi(A) = \max_{x \in A} r(x) \; ;\forall A \in P(X)$$

تابع توزیع امکان r بر روی مجموعه مرجع $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ را در نظر بگیرید. $r=\{\rho_1,\rho_2,...,\rho_n\}$ بطوریکه $\rho_i=r(x_i)\ ;\forall x_i\in X$ می‌باشد، یک *توزیع امکان* مرتبط با تابع r نامیده می‌شود.

هر پیمانه امکان می‌تواند بطور یکتا توسط یک nتایی مرتب مشخص شود:

$$m=(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)$$

برای برخی از $n\in N$، جائیکه $\mu_i=m(A_i)\ ;\forall i\in N_n$. بوضوح داریم:

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_i=1$$

و $\mu_i\in[0,1]\ ;\forall i\in N_n$.

m را *توزیع پایه‌ای* گویند.

حال، با استفاده از علامت معرفی شده، هریک از توزیعهای پایه‌ای $m \in M$ را دقیقاً با یک توزیع امکان $r \in R$ نمایش می‌دهیم و برعکس.

امکان بعنوان پیمانه‌های مبتنی بر ظاهر سازگار داریم:

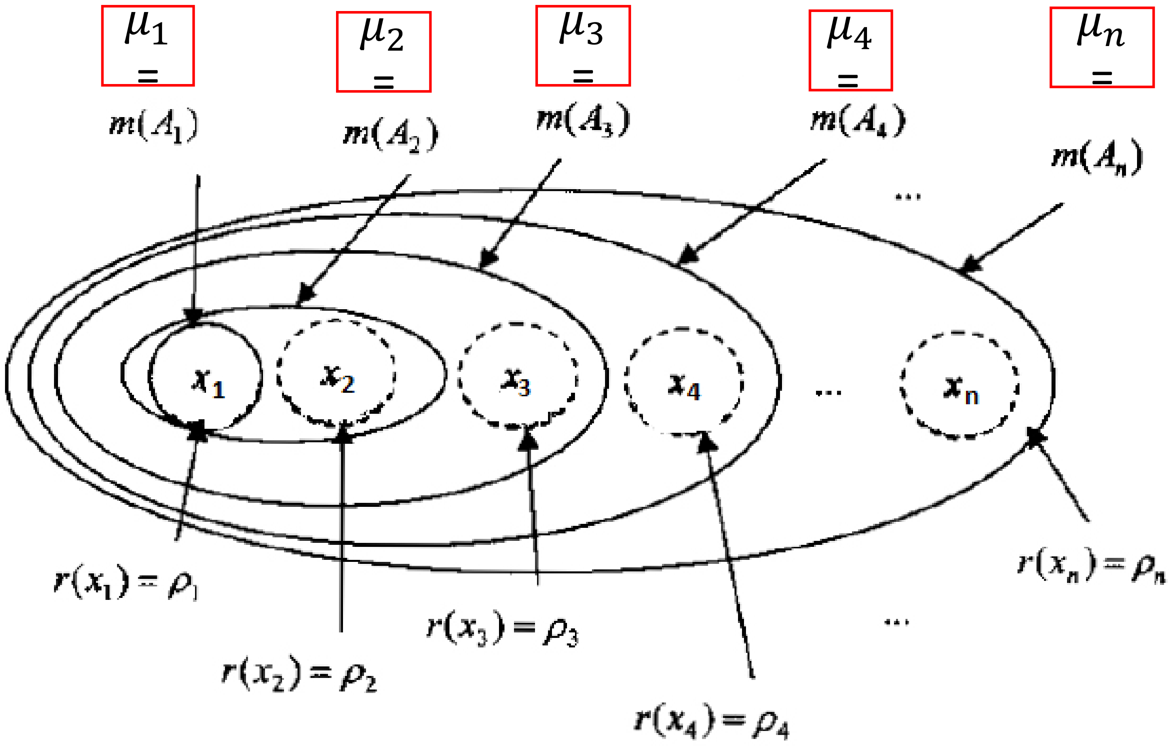
$$\rho_i = r(x_i) = \pi(\{x_i\}) = Pl(\{x_i\}) \;\; ;\forall x \in X$$

$$\rho_i = Pl(\{x_i\}) = \sum_{k=i}^{n} m(A_k) = \sum_{k=i}^{n} \mu_k$$

فصل پنجم

پیمانه های فازی

پیمانه های امکان و الزام



توالی کاملی از زیرمجموعه‌های آشیانه‌ای

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n (= X)$$

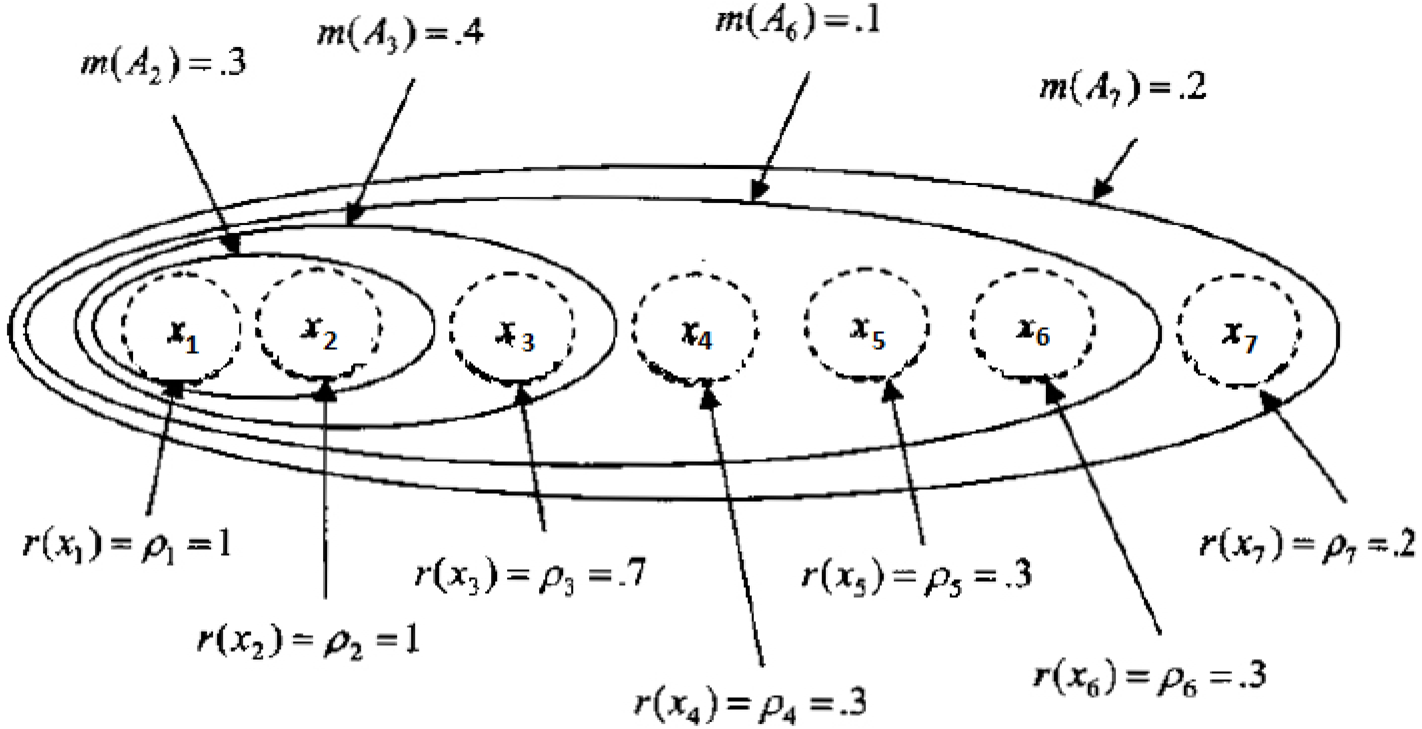
$$\boxed{\begin{aligned}
\rho_1 &= \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_i + \mu_{i+1} + \ldots + \mu_n \\
\rho_2 &= \mu_2 + \ldots + \mu_i + \mu_{i+1} + \ldots + \mu_n \\
&\vdots \\
\rho_i &= \mu_i + \mu_{i+1} + \ldots + \mu_n \\
&\vdots \\
\rho_n &= \mu_n
\end{aligned}}$$

$$\mu_i = \rho_i - \rho_{i+1}$$

تخصیص پایه‌ای عبارت است از:

$m = (0,.3,.4,0,0,.1,.2)$

$r = (1,1,.7,.3,.3,.3,.2)$



پیمانه امکان تعریف شده روی X

عناصر کانونی آشیانه‌ای پیمانه امکان روی $P(X)$ جائیکه $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

هر پیمانه امکان π بر روی $P(X)$ می‌تواند توسط یک تابع توزیع امکان تعیین گردد:

$$r : X \to [0,1]$$

و از طریق رابطه زیر نشان داده شود:

$$\pi(A) = \max_{x \in A} r(x) \;;\forall A \in P(X)$$

اکنون درجه امکان‌پذیری برای هر زیرمجموعه A از $X = \{x_1, x_2, ..., x_7\}$ می‌تواند محاسبه شود.

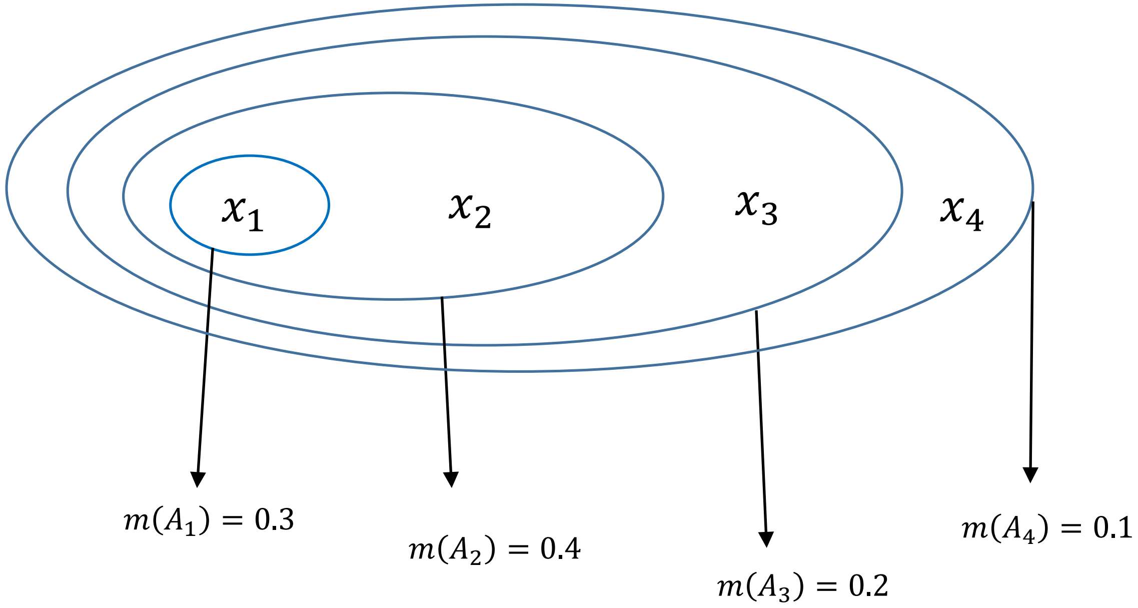
برای مثال داریم:

$$\pi(\{x_1,...,x_k\}) = \max(\rho_1,...,\rho_k) = \max(1,...,\rho_k) = 1 \;;\forall k \in N_7$$

و بطور مشابه:

$$\pi(\{x_3,x_4,x_5\}) = \max(\rho_3,\rho_4,\rho_5) = \max(.7,.3,.3) = .7$$

محاسبه الزام از روی امکان:



عناصر کانونی	$\boldsymbol{m_3}$	$\boldsymbol{PL}$ or π	$\boldsymbol{Bel}$ or η
x_1	0.3	1	
x_1Ux_2	0.4	1	
x_1Ux_2Ux_3	0.2	1	
x_1Ux_2Ux_3Ux_4	0.1	1	

$$\rho_i = r(x_i) = \pi(\{x_i\}) = Pl(\{x_i\})$$

$$\pi(A) = \max_{x \in A} r(x) \ ; \forall A \in P(X)$$

$\rho_1 = r(x_1)$=$\pi(x_1)$=1
$\pi(x_2)$=0.7
$\pi(x_3)$=0.3
$\pi(x_4)$=0.1

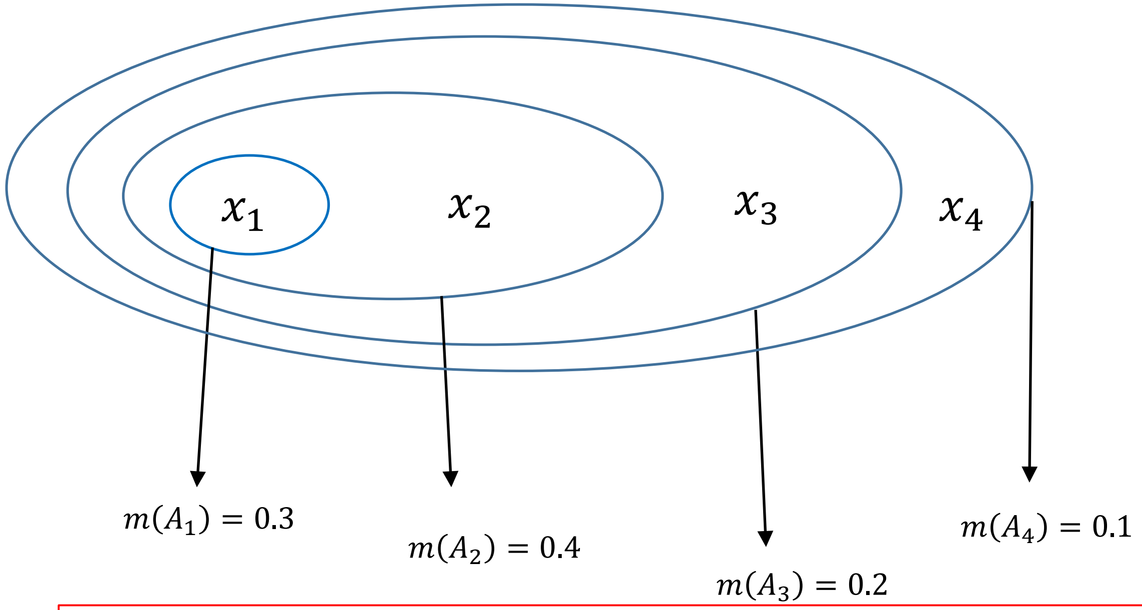
$\pi(x_1, x_2)$=max{$\pi(x_1), \pi(x_2)$}=1
$\pi(x_1, x_2, x_3)$=max{$\pi(x_1), \pi(x_2), \pi(x_3)$} =1
$\pi(x_1, x_2, x_3, x_4)$=max{$\pi(x_1), \pi(x_2), \pi(x_3), \pi(x_4)$} =1

پیمانه‌های الزام و امکان توسط رابطه زیر به یکدیگر مربوط می‌شوند:

$$\eta(A)=1-\pi(\not\subset A)\;;\forall A\in P(X)$$

پیمانه های امکان و الزام

محاسبه الزام از روی امکان:



عناصر کانونی	$\boldsymbol{m_3}$	$\boldsymbol{PL}$ or π	$\boldsymbol{Bel}$ or η
x_1	0.3	1	0.3
$x_1 \cup x_2$	0.4	1	0.7
$x_1 \cup x_2 \cup x_3$	0.2	1	0.9
$x_1 \cup x_2 \cup x_3 \cup x_4$	0.1	1	1

$\eta(x_1)=1-\pi(\not\subset x_1)=1-\pi(x_2,x_3,x_4)=1-\max\{\pi(x_2),\pi(x_3),\pi(x_4)\}=1-0.7=0.3$
$\eta(x_2)=0$
$\eta(x_3)=0$
$\eta(x_4)=0$

$\eta(x_1,x_2)=1-\max\{\pi(x_3),\pi(x_4)\}=1-0.3=0.7$
$\eta(x_1,x_2,x_3)=1-\pi(x_4)=1-0.1=0.9$
$\eta(x_1,x_2,x_3,x_4)=1-\pi(\emptyset)=1-0=1$

- $\pi(A) \geq \eta(A)$
- Min {$\eta(A)$,$\eta(\acute{A})$}=0
- اگر $\pi(A) < 1$ آنگاه $\eta(A) = 0$
- $\eta(A) + \eta(\acute{A}) \leq 1$
- $\pi(A) + \pi(\acute{A}) \geq 1 , \leq 2$
- اگر $\pi(A) = 1$ آنگاه $\eta(A) \geq 0$
- اگر در مجموعه ای ۲ عنصر با امکان ۱ داشته باشیم، الزام آنها قطعا صفر است.

فصل پنجم

پیمانه های فازی پیمانه های امکان و الزام

فرض کنید بر اساس تجارب قبلی، تابع توزیع امکان برای اخذ نمره A تا E برای شش دانشجو طبق جدول زیر تعریف می شود:

الف) الزام اینکه دانشجو ۱ نمره B بگیرد؟

$\eta(B_1)$=1-$\pi(\not\subset B_1) = 1-\pi(A_1, C_1, D_1, E_1)$=1- max{0.8,0.7,0,0}=1-0.8=0.2

نمره / دانشجو	A	B	C	D	E
1	0.8	1	0.7	0	0
2	1	0.8	0.6	0.1	0
3	0.6	0.7	0.9	0.5	0
4	0	0.8	0.9	0.5	0
5	0	0	0.3	1	0.2
6	0.3	1	0.3	0	0

فرض کنید بر اساس تجارب قبلی، تابع توزیع امکان برای اخذ نمره A تا E برای شش دانشجو طبق جدول زیر تعریف می شود:

ب) الزام اینکه دانشجو ۳ نمره A بگیرد؟

$\eta(A_3)$=1-$\pi(\not\subset A_3) = $ 1−$\pi(B_3, C_3, D_3, E_3)$=1- max{0.7,0.9,0.5,0}=1-0.9=0.1

دانشجو \ نمره	A	B	C	D	E
1	0.8	1	0.7	0	0
2	1	0.8	0.6	0.1	0
3	0.6	0.7	0.9	0.5	0
4	0	0.8	0.9	0.5	0
5	0	0	0.3	1	0.2
6	0.3	1	0.3	0	0

فرض کنید بر اساس تجارب قبلی، تابع توزیع امکان برای اخذ نمره A تا E برای شش دانشجو طبق جدول زیر تعریف می شود:

ج) الزام اینکه دانشجو ۱ نمره A یا B بگیرد و دانشجو ۲ نمره A یا B بگیرد ؟

η=1-$\pi(\not\subset)$ =1- max{0.7,0,0,0.6,0.1,0}=1-0.7=0.3

نمره / دانشجو	A	B	C	D	E
1	0.8	1	0.7	0	0
2	1	0.8	0.6	0.1	0
3	0.6	0.7	0.9	0.5	0
4	0	0.8	0.9	0.5	0
5	0	0	0.3	1	0.2
6	0.3	1	0.3	0	0

ترکیب شواهد

برای کسب نظر تلفیقی خبرگان می‌توان نظرات آنها را با هم ادغام نمود. در صورتیکه شواهد بیان شده توسط تخصیصهای پایه‌ای m_1 و m_2 بر روی مجموعه توانی $P(X)$ داده شده باشد، می‌توان آنها را بطور مناسبی برای بدست آوردن تخصیص پایه‌ای m_1 و m_2 ترکیب نمود. بطورکلی، شهود به طرق مختلفی می‌توانند ترکیب شوند. راه استاندارد ترکیب شهود توسط رابطه زیر بیان می‌گردد:

$$m_{1,2}(A) = \frac{\sum_{B\cap C=A} m_1(B).m_2(C)}{1-K} \quad ; A \neq \phi$$

$$m_{1,2}(\phi) = 0$$

$$K = \sum_{B\cap C=\phi} m_1(B).m_2(C)$$

فصل پنجم
پیمانه های فازی
ترکیب شواهد

تخصیص پایه ای توام

پیمانه باور توام

ترکیب درجات شهود از دو منبع مختلف مربوط به مثال

	متخصص ۱		متخصص ۲		شهود ترکیبی	
عناصر کانونی	m_1	Bel_1	m_2	Bel_2	$m_{1,2}$	$Bel_{1,2}$
R	0.05	0.05	0.15	0.15	0.21	0.21
D	0	0	0	0	0.01	0.01
C	0.05	0.05	0.05	0.0.5	0.09	0.09
$R \cup D$	0.15	0.2	0.05	0.2	0.12	0.34
$R \cup C$	0.1	0.2	0.2	0.4	0.2	00.5
$D \cup C$	0.05	0.1	0.05	0.1	0.06	0.16
$R \cup D \cup C$	0.6	1	0.5	1	0.31	1

$$K = \sum_{B \cap C = \phi} m_1(B).m_2(C)$$

$$\begin{aligned} K = {} & m_1(R).m_2(D) + m_1(R).m_2(C) + m_1(R).m_2(D \cup C) \\ & + m_1(D).m_2(R) + m_1(D).m_2(C) + m_1(D).m_2(R \cup C) \\ & + m_1(C).m_2(R) + m_1(C).m_2(D) + m_1(C).m_2(R \cup D) \\ & + m_1(R \cup D).m_2(C) \\ & + m_1(R \cup C)\ .\ m_2(D) \\ & + m_1(D \cup C).m_2(R) = 0.03 \end{aligned}$$

$$\boxed{1 - K = 0.97}$$

فصل پنجم

پیمانه های فازی

ترکیب شواهد

$$m_{1,2}(A)=\frac{\sum_{B\cap C=A} m_1(B).m_2(C)}{1-K}\ ;A\neq\phi$$

$$\boxed{1-K=0.97}$$

ترکیب درجات شهود از دو منبع مختلف مربوط به مثال

	متخصص ۱		متخصص ۲		شهود ترکیبی	
عناصر کانونی	m_1	Bel_1	m_2	Bel_2	$m_{1,2}$	$Bel_{1,2}$
R	0.05	0.05	0.15	0.15	0.21	0.21
D	0	0	0	0	0.01	0.01
C	0.05	0.05	0.05	0.0.5	0.09	0.09
$R\cup D$	0.15	0.2	0.05	0.2	0.12	0.34
$R\cup C$	0.1	0.2	0.2	0.4	0.2	00.5
$D\cup C$	0.05	0.1	0.05	0.1	0.06	0.16
$R\cup D\cup C$	0.6	1	0.5	1	0.31	1

$$\begin{aligned}
m_{1,2}(R)=[&m_1(R).m_2(R)+m_1(R).m_2(R\cup D)+m_1(R).m_2(R\cup C)\\
&+m_1(R).m_2(R\cup D\cup C)+m_1(R\cup D).m_2(R)+m_1(R\cup D).m_2(R\cup C)\\
&+m_1(R\cup C).m_2(R\cup D)+m_1(R\cup C).m_2(R)+m_1(R\cup D\cup C).m_2(R)]/0.97\\
&=0.21
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{1,2}(R\cup C)=[&m_1(R\cup C).m_2(R\cup C)+m_1(R\cup C).m_2(R\cup C\cup D)\\
&+m_1(R\cup C\cup D).m_2(R\cup C)]/0.97\\
&=0.2
\end{aligned}$$

اجازه دهید X={a,b,c,d} مجموعه مرجع باشد. با داشتن اندازه های باور:

$$Bel(\{b\}) = 0.1$$
$$Bel(\{a, b\}) = 0.2$$
$$Bel(\{b, c\}) = 0.4$$
$$Bel(\{b, d\}) = 0.1$$

$$Bel(\{a, b, c\}) = 0.5$$
$$Bel(\{a, b, d\}) = 0.2$$
$$Bel(\{b, c, d\}) = 0.6$$
$$Bel(X) = 1$$

تخصیصهای پایه مربوط را تعیین کنید.

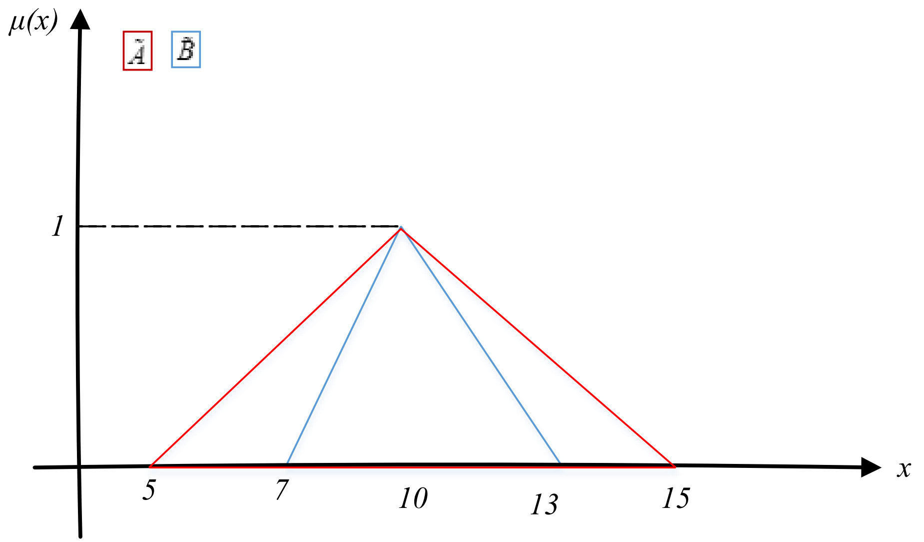
$$\boxed{Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)}$$

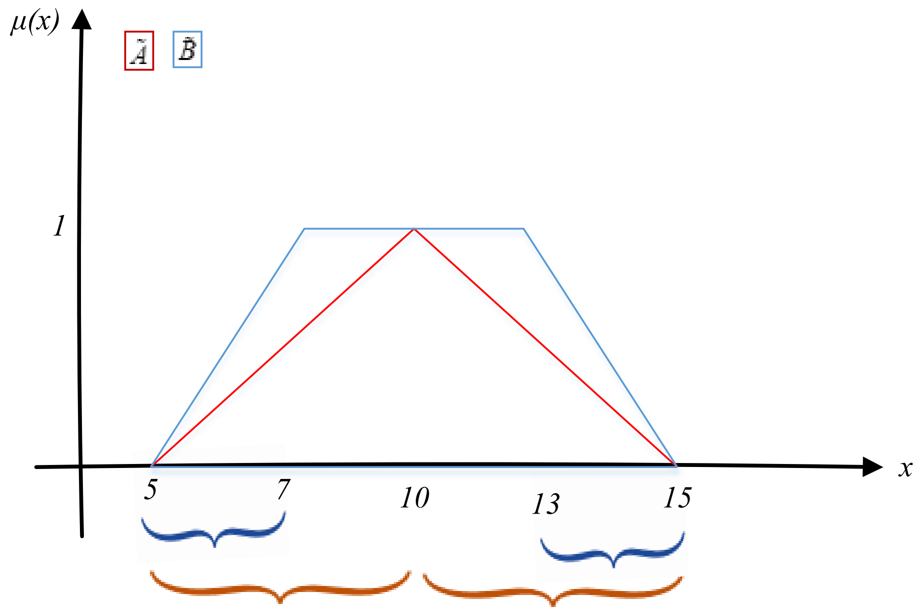
فصل ششم

سنجش فازی بودن

سنجش فازی بودن (Measure of Fuzziness) :

طبق واژگان موجود در ادبیات موضوع، از اندازه گیری عدم قطعیتی که با ابهام مرتبط می باشد بعنوان سنجش فازی بودن یاد می شود.





بطور کلی، سنجش فازی بودن تابعی به شکل زیر است:

$$f : \tilde{P}(X) \to R$$

جائیکه $\tilde{P}(X)$ نشاندهنده مجموعه تمام زیرمجموعه‌های فازی X می‌باشد. بعبارت دیگر، $f(\tilde{A})$ مقدار فازی‌بودن زیرمجموعه فازی $\tilde{A}$ از مجموعه مرجع X را نشان می‌دهد.

تعیین f بعنوان سنجش فازی بودن، مستلزم رعایت اصول بدیهی مربوط به آن می باشد.

اصل(۱): $f(\tilde{A}) = 0$ می‌باشد اگر و تنها اگر $\tilde{A}$ یک مجموعه غیرفازی باشد.

اصل(۲): اگر $\tilde{A} < \tilde{B}$ است آنگاه $f(\tilde{A}) \le f(\tilde{B})$ می‌باشد.

اصل(۳): $f(\tilde{A})$ حداکثر مقدار را خواهد داشت اگر و تنها اگر $\tilde{A}$ کاملاً فازی باشد.

سنجش فازی بودن

درجه فازی بودن یک مجموعه فازی را می توان بر حسب فقدان تمایز بین مجموعه و مکمل آن بیان نمود.

در حقیقت، فاصله بین مجموعه ها و مکمل آنهاست که مجموعه های فازی را از مجموعه های قطعی متمایز می گرداند.

بعبارتی، هر چه فاصله بین یک مجموعه فازی با مکمل آن کمتر باشد آن مجموعه فازی تر است.

$$Distance\ (\tilde{A}, \not\subset \tilde{A}) = \sum \left| \mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{\widetilde{\not\subset A}}(x_i) \right|$$

$$f(\tilde{A}) = 1 - \frac{Distance\ (\tilde{A}, \not\subset \tilde{A})}{|X|}$$

$$f(\tilde{A}) = 1 - \frac{Distance\ (\tilde{A}, \not\subset \tilde{A})}{|X|}$$

$\tilde{A} = \{(5,0.1), (6,0.3), (7,0.4), (8,0.5), (9,0.7), (10,1), (11,0.7), (12,0.5), (13,0.4), (14,0.3), (15,0.1)\}$

$\tilde{B} = \{(7,0.2), (8,0.6), (9,0.8), (10,1), (11,0.8), (12,0.6), (13,0.2)\}$

$D(\tilde{A})$=$|0.1 - 0.9|$+$|0.3 - 0.7|$+$|0.4 - 0.6|$+$|0.5 - 0.5|$+$|0.7 - 0.3|$+$|1 - 0|$+$|0.7 - 0.3|$+$|0.5 - 0.5|$+$|0.4 - 0.6|$+$|0.3$

فصل هفتم

توصیف های زبانی و اشکال تحلیلی آنها

- **توصیفات زبانی فازی** نمایش مرسوم سیستمهایی هستند که از طریق قواعد اگر-آنگاه فازی ساخته می شوند.

- اگرچه این توصیفات، با توجه به زبان بشر فرموله شده اند ولی دارای پایه و اساس بسیار دقیقی هستند که شامل مجموعه ها و روابط فازی می باشد.

- آنها دانش مربوط به یک سیستم را در عبارتی به شکل زیر در می آورند:

اگر (مجموعه ای از شرایط تحقق یابد)

آنگاه (مجموعه ای از نتایج استنتاج شود)

فصل هفتم

توصیفهای زبانی و اشکال تحلیلی آنها

مقدمه

۲ زبان:

زبان ریاضی ← یعنی، $y=f(x)$

زبان منطق ← یعنی،

اگر x برابر a_i است، آنگاه y برابر b_i است

$$\begin{matrix}(a_1, b_1)\\(a_2, b_2)\\ \vdots \\(a_i, b_i)\\ \vdots \\(a_n, b_n)\end{matrix}$$

اگر x برابر a_1 است، آنگاه y برابر b_1 است

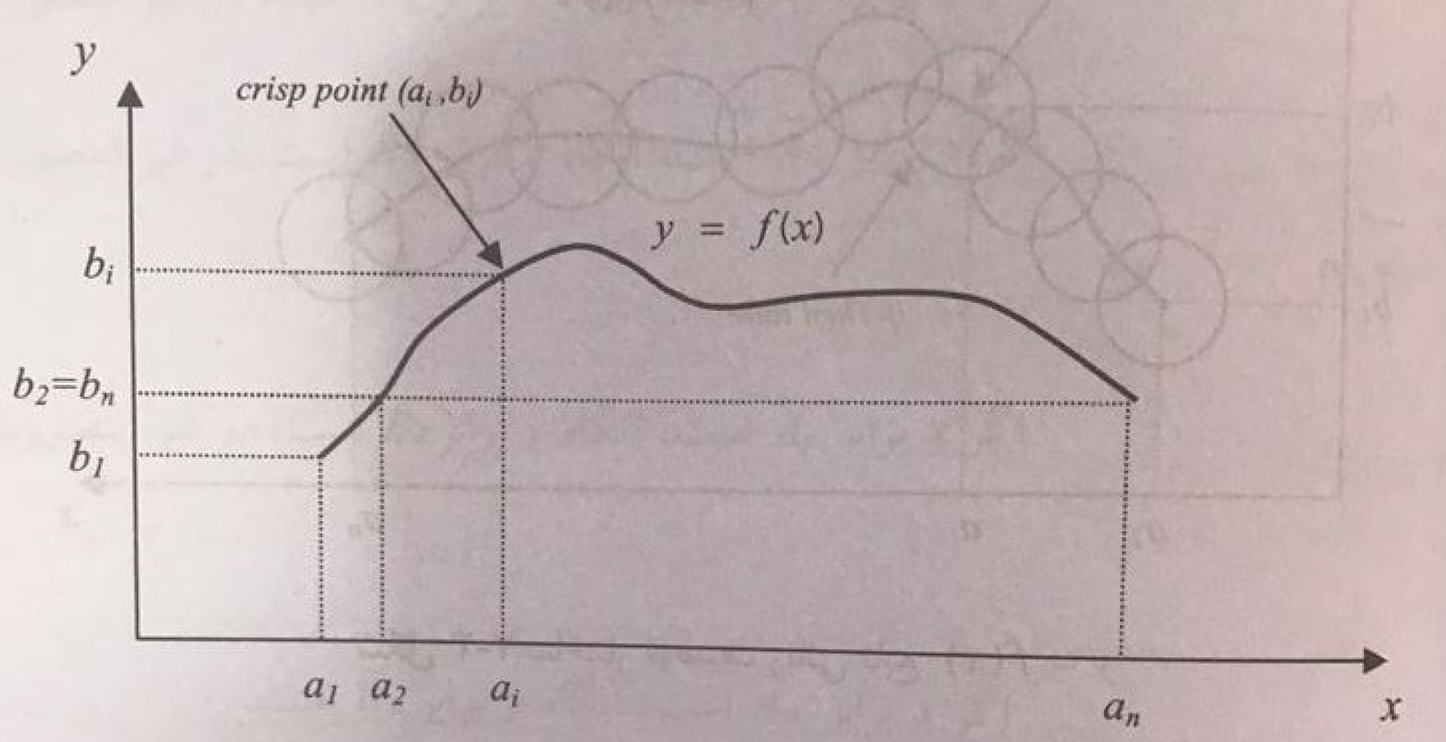
اگر x برابر a_2 است، آنگاه y برابر b_2 است

$\vdots$

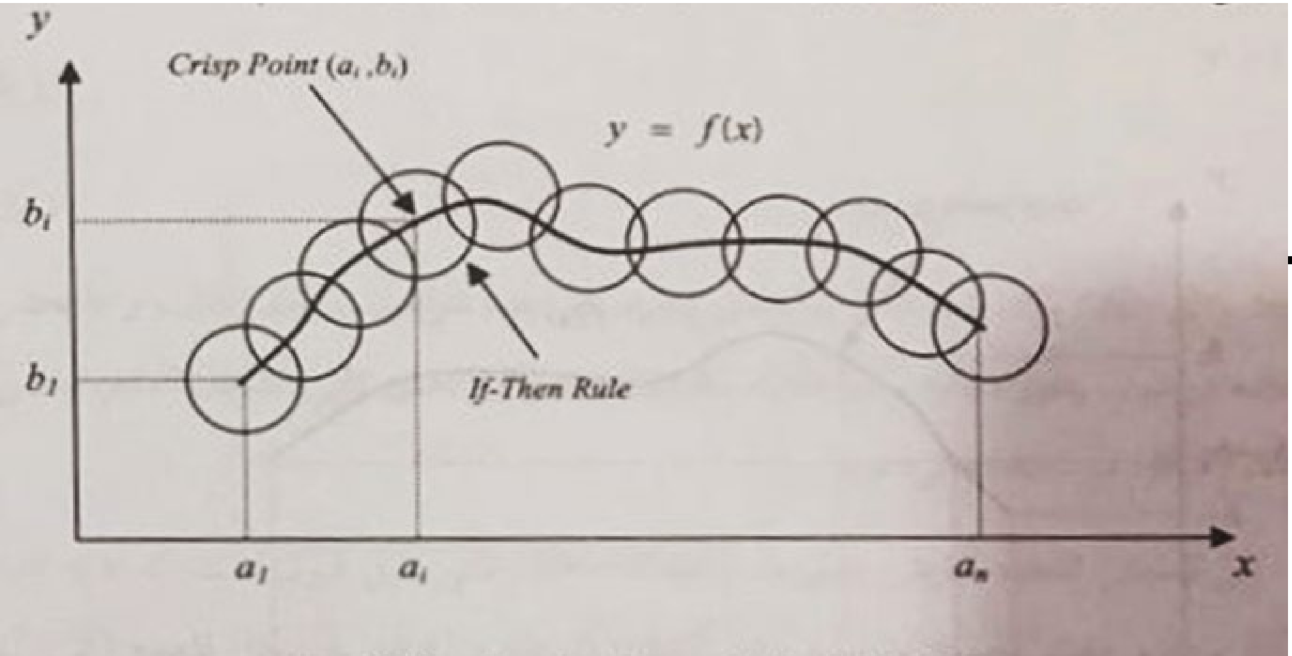
اگر x برابر a_i است، آنگاه y برابر b_i است

$\vdots$

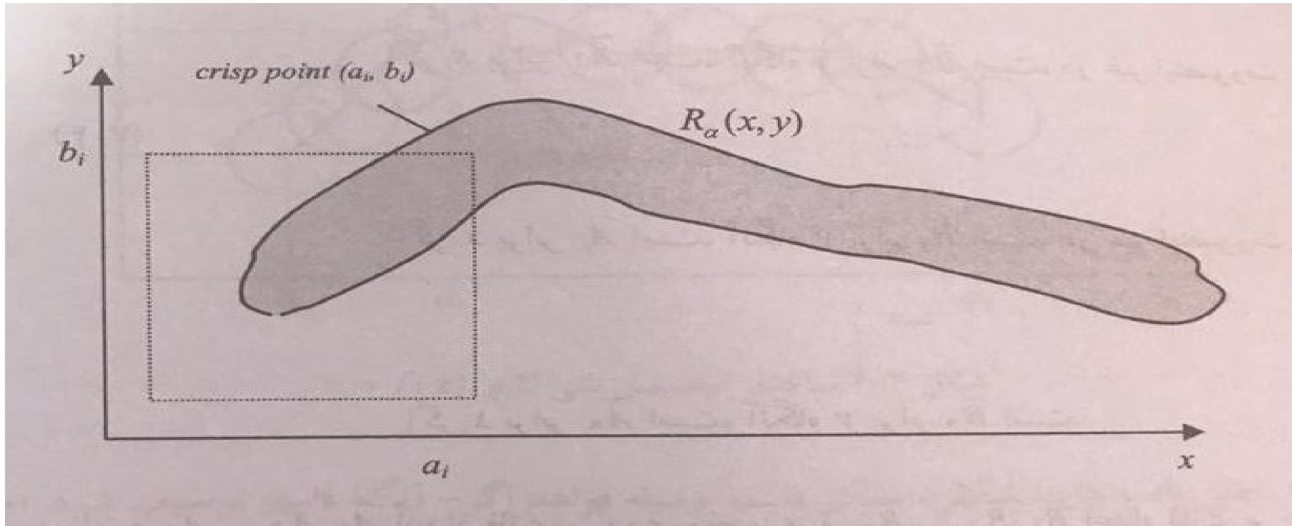
اگر x برابر a_n است، آنگاه y برابر b_n است



شکل ۲-۷ تابع $y=f(x)$ می‌تواند بعنوان مجموعه‌ای از نقاط قطعی (a_i, b_i) در نظر گرفته شده و هر نقطه بعنوان یک قاعده اگر- آنگاه قطعی بیان گردد



شکل ۳-۷ ساختار توصیف زبانی تابع $y = f(x)$



شکل ۴-۷ اغلب توابع دنیای واقعی ممکن است عملاً یک رابطه (بسیار عمومی) باشند

فصل هفتم

توصیفهای زبانی و اشکال تحلیلی آنها

اگر x حدودا برابر a_i است، آنگاه y حدودا برابر b_i است

$$\boxed{if\ x = \tilde{a}_i \rightarrow Then\ y = \tilde{b}_i}$$

- ✓ شکل تحلیل رابطه فوق، رابطه فازی است که رابطه استلزام قواعد نامیده می شود.
- ✓ در اینجا فرض کنید هر قاعده اگر-آنگاه یک رابطه استلزام دارد.

دو مسئله مهم در استنتاج فازی وجود دارد:

الف) قانون قیاس استثنایی تعمیم یافته (GMP)

اگر x **برابر** $\tilde{A}$ **است، آنگاه** y **برابر** $\tilde{B}$ **است**

x **برابر** $\tilde{A}'$ **است**

Y **برابر** $\tilde{B}'$ **است**

$$R(x,y)$$

$$\tilde{B}'=\tilde{A}' \circ R(x,y)$$

ب) قانون قیاس رفع تالی تعمیم یافته (GMT)

اگر x برابر $\tilde{A}$ است، آنگاه y برابر $\tilde{B}$ است

$$R(x,y)$$

y برابر $\tilde{B}'$ است

---

x برابر $\tilde{A}'$ است

$$\tilde{A}' = R(x,y) \circ \tilde{B}'$$

روابط استلزام

❖ قواعد اگر-آنگاه فازی عبارات شرطی هستند که وابستگی یک (یا چند) متغیر زبانی را به یکدیگر نشان می دهند.

❖ شکل تحلیلی یک قاعده اگر-آنگاه در واقع یک رابطه فازی است که رابطه استلزام نامیده می شود.

اگر x برابر $\tilde{A}$ است، آنگاه y برابر $\tilde{B}$ است

$$R(x,y) = \int \mu(x,y)/(x,y)$$

$$\mu(x,y) = \varphi(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y))$$

الف) عملگر استلزام بیشینه-کمینه زاده

$$\varphi_m\left(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)\right) = \mu(x, y) = \left(\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y)\right) \vee \left(1 - \mu_{\tilde{A}}(x)\right)$$

ب) عملگر استلزام کمینه ممدانی

$$\varphi_c\left(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)\right) = \mu(x, y) = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y)$$

ج) عملگر استلزام حاصلضرب لارسن

$$\varphi_P\left(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)\right) = \mu(x, y) = \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(y)$$

تفاوت عملگرهای استلزام ممدانی (*Mamdani*) و سوگنو (*Sugeno*) در چیست؟

قانون قیاس استثنایی تعمیم یافته (GMP)

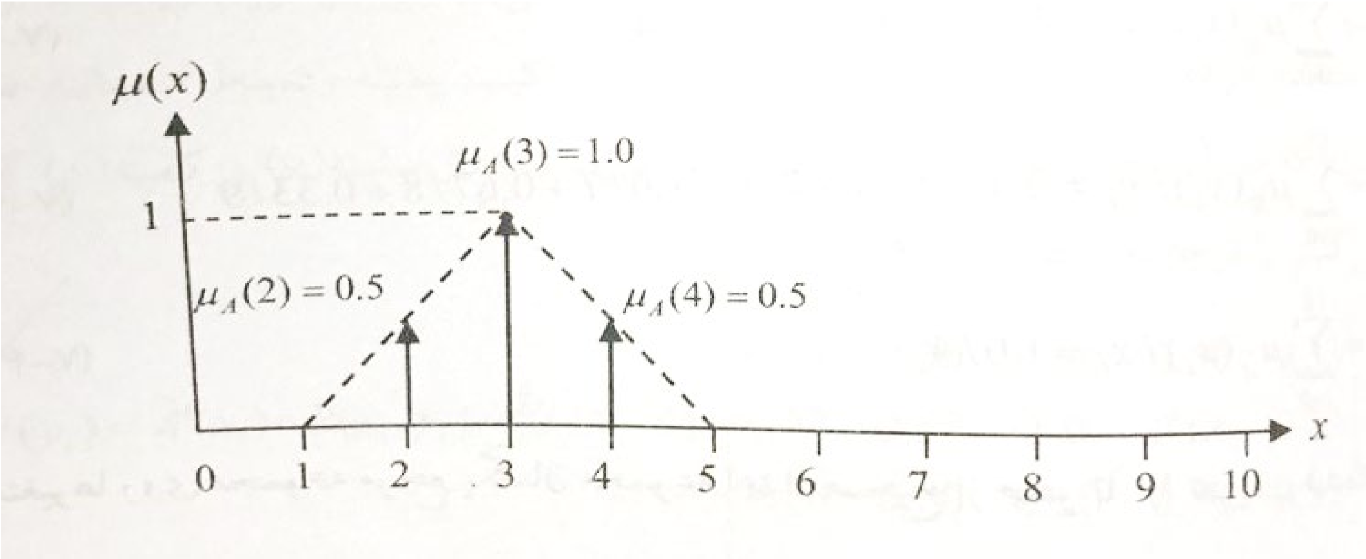
اگر x برابر $\tilde{A}$ است، آنگاه y برابر $\tilde{B}$ است — $R(x,y)$

x برابر $\tilde{A}'$ است

---

y برابر $\tilde{B}'$ است — $\tilde{B}' = \tilde{A}' \circ R(x,y)$

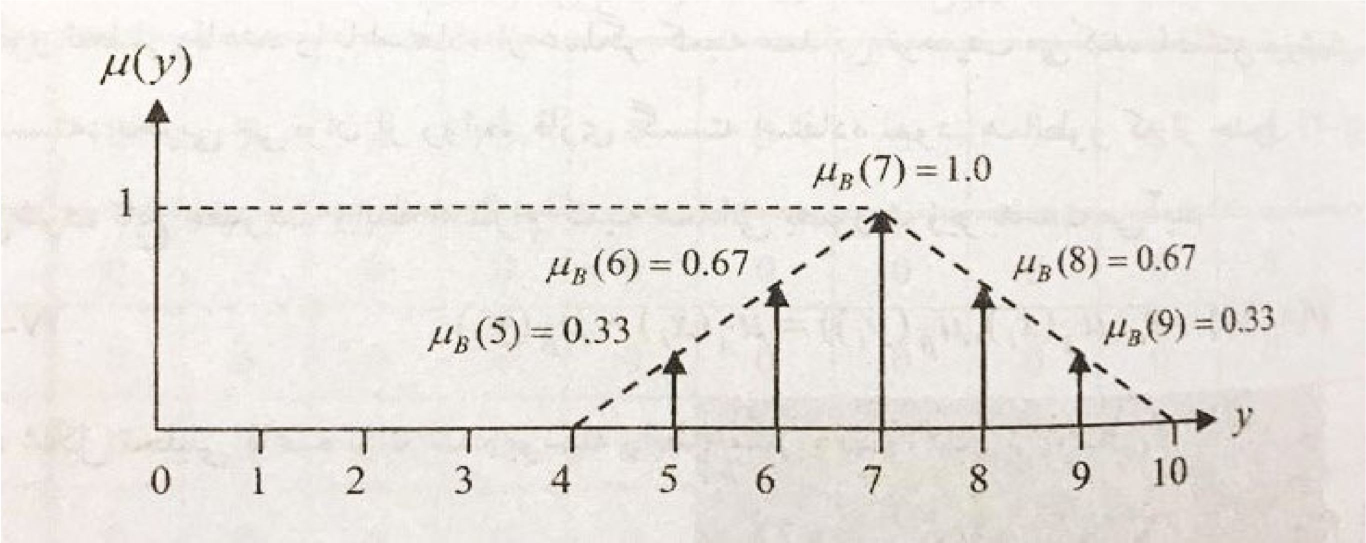
if



GMP و استلزام کمینه ممدانی:

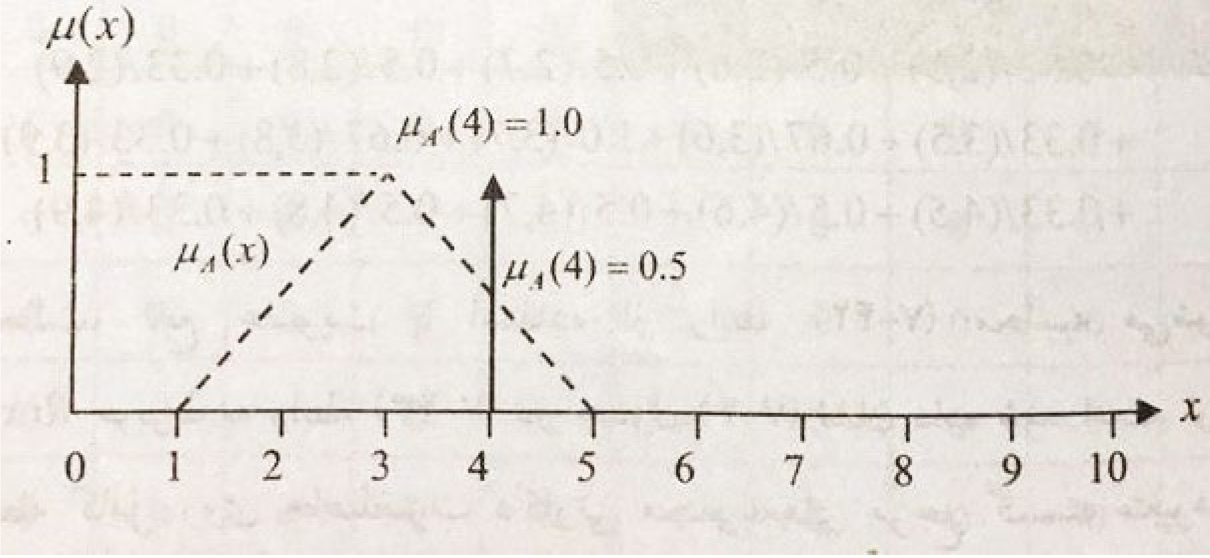
اگر x برابر $\tilde{A}$ است، آنگاه y برابر $\tilde{B}$ است

→ **then**



GMP و استلزام کمینه ممدانی:

if



$\rightarrow$ **Then** $y=\tilde{B}' = ?$

$$\tilde{A} = \{(2,0.5), (3,1), (4,0.5)\}$$

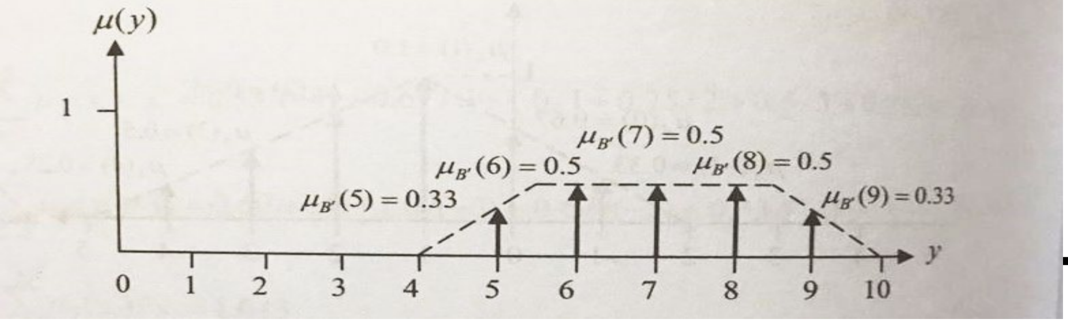
$$\tilde{B} = \{(5,0.33), (6,0.67), (7,1), (8,0.67), (9,0.33)\}$$

$$\tilde{A}' = \{(4,1)\}$$

$$R(x,y)$$

$$\downarrow$$

	Y=5	Y=6	Y=7	Y=8	Y=9
X=2	0.33	0.5	0.5	0.5	0.33
X=3	0.33	0.67	1	0.67	0.33
X=4	0.33	0.5	0.5	0.5	0.33



فصل هفتم

توصیفهای زبانی و اشکال تحلیلی آنها

$$\tilde{B}'=\tilde{A}'\circ R(x,y) \rightarrow \tilde{B}' = \{(4,1)\} \circ R(x,y)$$

$$= \tilde{B}' = \{(5,0.33), (6,0.5), (7,0.5), (8,0.5), (9,0.33)\}$$

X=2	X=3	X=4
0	0	1

$\circ$

	Y=5	Y=6	Y=7	Y=8	Y=9
X=2	0.33	0.5	0.5	0.5	0.33
X=3	0.33	0.67	1	0.67	0.33
X=4	0.33	0.5	0.5	0.5	0.33

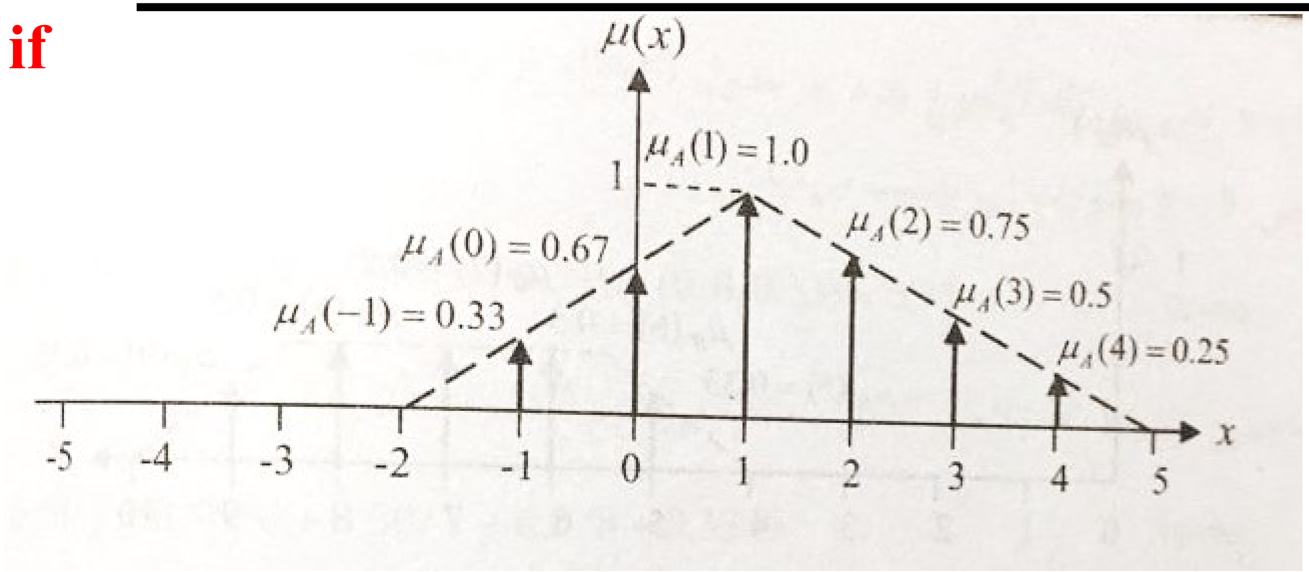
$=$

Y=5	Y=6	Y=7	Y=8	Y=9
0.33	0.5	0.5	0.5	0.33

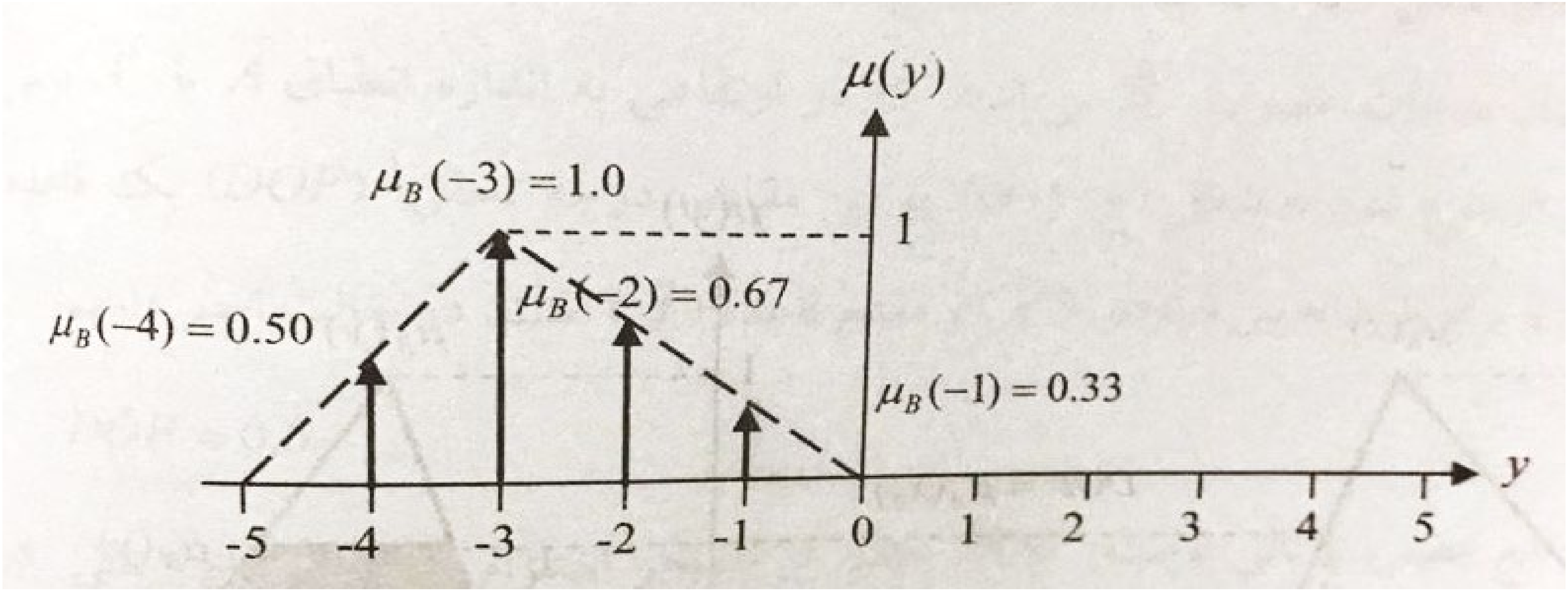
GMP با استلزام حاصلضرب لارسن:

اگر x برابر $\tilde{A}$ است، آنگاه y برابر $\tilde{B}$ است

if

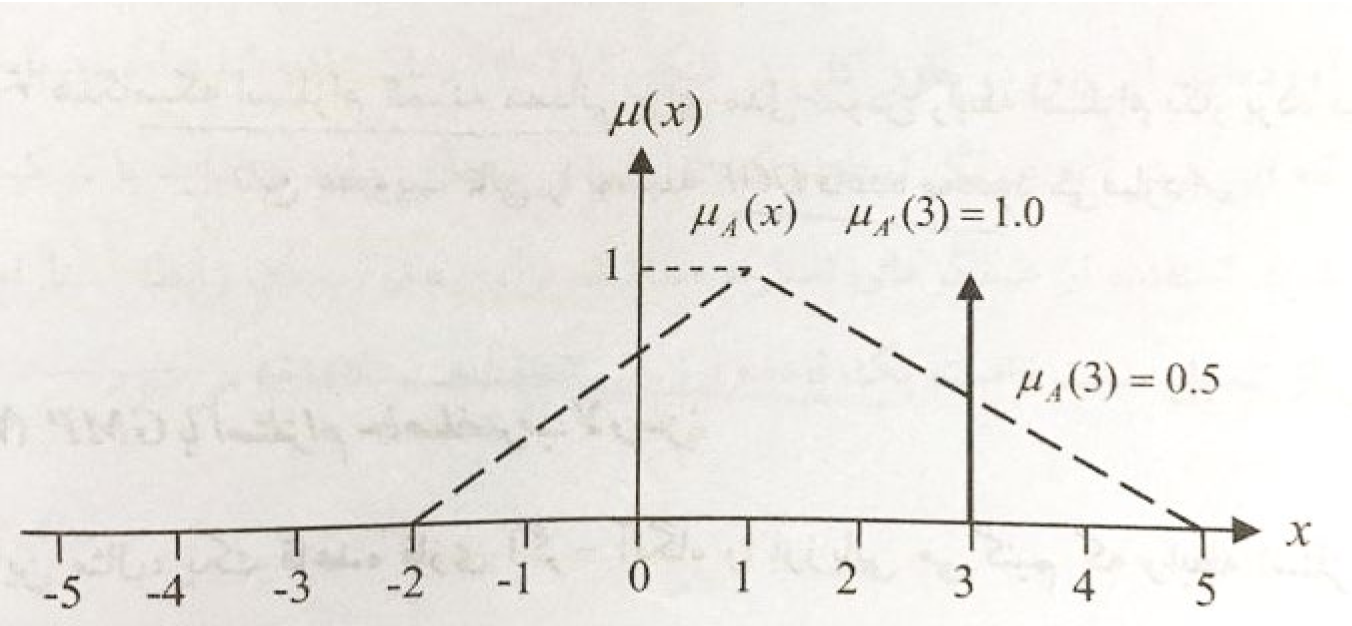


→ **then**



if

GMP با استلزام حاصلضرب لارسن:



$\rightarrow$ **Then** $y=\tilde{B}' = ?$

$$\tilde{A} = \{(-1,0.33), (0,0.67), (1,1), (2,0.75), (3,0.5), (4,0.25)\}$$

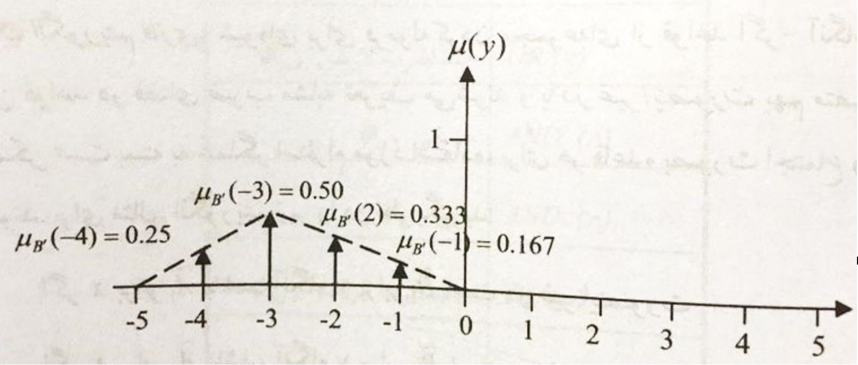
$$\tilde{B} = \{(-4,0.5), (-3,1), (-2,0.67), (-1,0.33)\}$$

$$\tilde{A}' = \{(3,1)\}$$

0.165=0.33*0.5

$$R(x, y)$$

	Y=-4	Y=-3	Y=-2	Y=-1
X=-1	0.165	0.333	0.222	0.111
X=0	0.333	0.667	0.445	0.222
X=1	0.5	1.00	0.667	0.333
X=2	0.375	0.750	0.495	0.250
X=3	0.250	0.50	0.333	0.166
X=4	0.125	1.00	0.167	0.083



$$= \tilde{B}' = \{(-4,0.25),(-3,0.5),(-2,0.33),(-1,0.167)\}$$

$$\tilde{B}' = \tilde{A}' \circ R(x,y) \quad \rightarrow \quad \tilde{B}' = \{(3,1)\} \circ R(x,y)$$

X=-1	X=0	X=1	X=2	X=3	X=4
0	0	0	0	1	0

$\circ$

	Y=-4	Y=-3	Y=-2	Y=-1
X=-1	0.165	0.333	0.222	0.111
X=0	0.333	0.667	0.445	0.222
X=1	0.5	1.00	0.667	0.333
X=2	0.375	0.750	0.495	0.250
X=3	0.250	0.50	0.333	0.166
X=4	0.125	1.00	0.167	0.083

$=$

Y=-4	Y=-3	Y=-2	Y=-1
0.25	0.5	0.33	0.167

قانون قیاس رفع تالی تعمیم یافته (GMT)

اگر x برابر $\tilde{A}$ است، آنگاه y برابر $\tilde{B}$ است

y برابر $\tilde{B}'$ است

$$R(x,y)$$

---

x برابر $\tilde{A}'$ است

$$\tilde{A}' = R(x,y) \circ \tilde{B}'$$

عملیات منطقی غیر از (GMP) یا (GMT) هم می توانند بطور تحلیلی از طریق ترکیب اجرا گردند. قواعد زیر را در نظر بگیرید:

اگر x برابر $\tilde{A}$ است، آنگاه y برابر $\tilde{B}$ است $\qquad R(x,y)$

اگر y برابر $\tilde{B}$ است، آنگاه z برابر $\tilde{C}$ است $\qquad R(y,z)$

می توانیم قاعده دیگری را با استفاده از قیاس صوری(Syllogism) به شکل **"اگر x برابر $\tilde{A}$ است، آنگاه z برابر $\tilde{C}$ است"** استنتاج کنیم.

$$R(x,z) = R(x,y) \circ R(y,z)$$

- در واقع در کنترل فازی، به دنبال استفاده از تجربه انسان (فرد خبره) برای کنترل فرآیندهای یک سیستم هستیم.

- متغیر:

ورودی (شرایط سیستم هستند)

خروجی (اقدامی که انجام می دهیم)

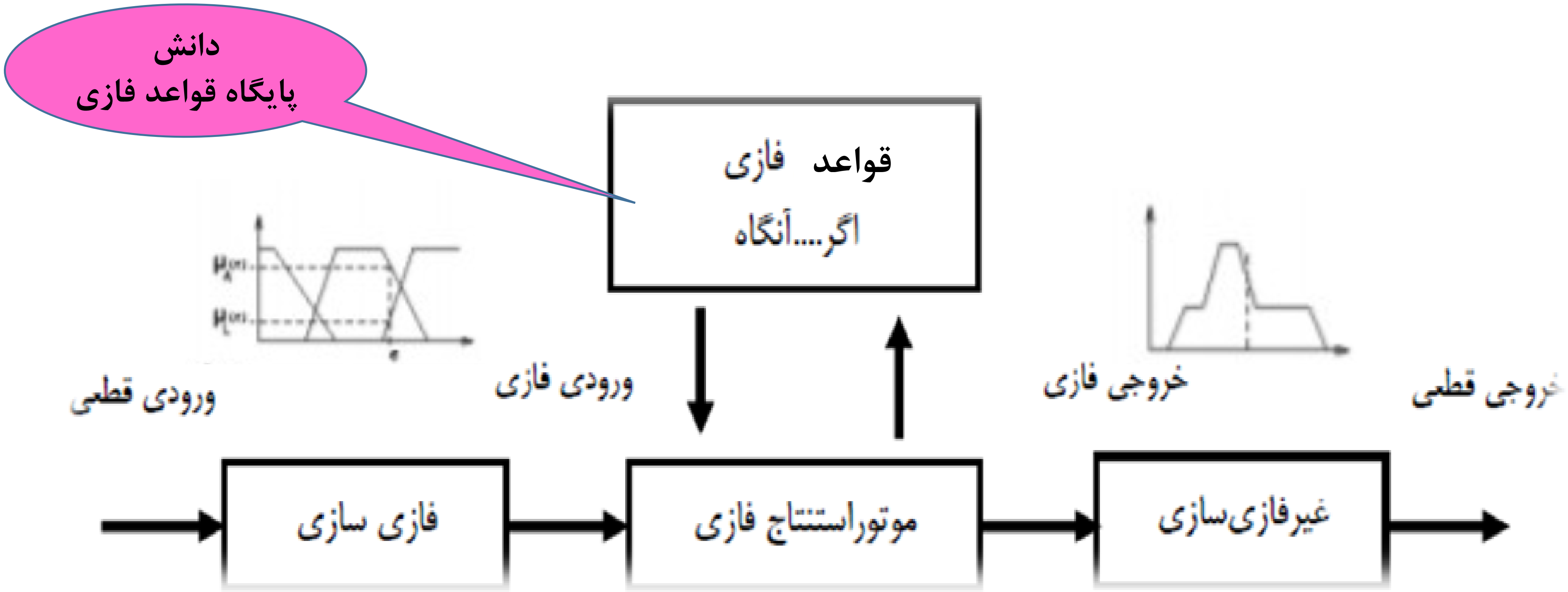
- قدم اول در کنترل فازی شناسایی متغیرها می باشد که فرد خبره مشخص می کند.

مثال) عوامل موثر بر قیمت محصول: قیمت مواد اولیه (x_1)-تعرفه گمرکی (x_2)-هزینه حمل و نقل (x_3)

و خروجی ما قیمت محصول (y) است.

$y = f(x_1,x_2,x_3)$ ✘

خبرگان



دانش
پایگاه قواعد فازی
قواعد فازی
اگر....آنگاه
ورودی قطعی
ورودی فازی
خروجی فازی
خروجی قطعی
فازی سازی
موتوراستنتاج فازی
غیرفازی‌سازی

فازیسازی:

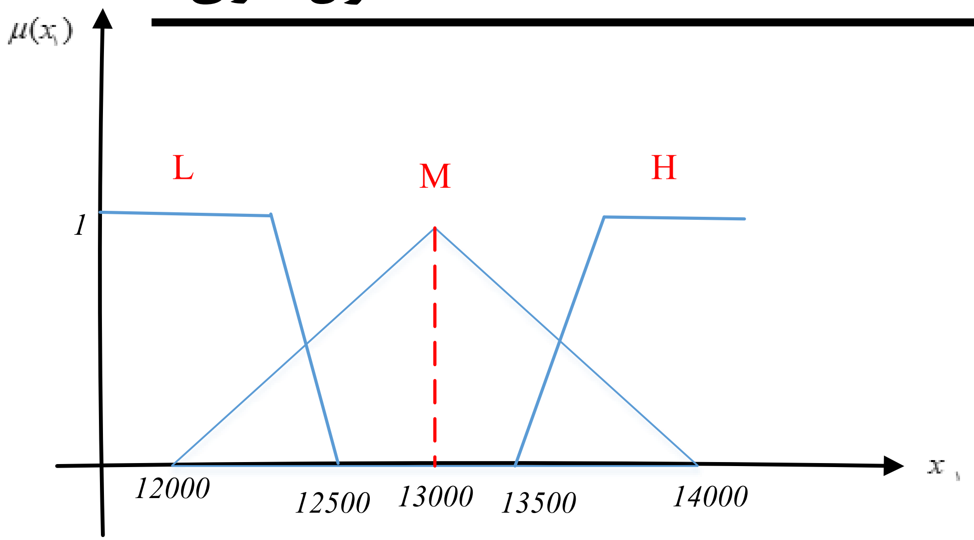
✓ برای مدل کردن ذهن فرد خبره سراغ متغیرهای زبانی می رویم.

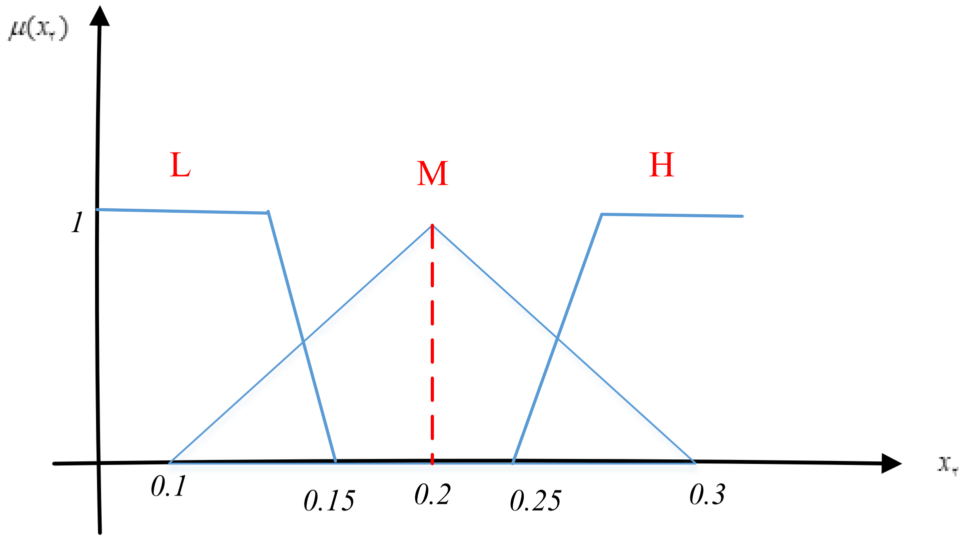
عوامل موثر بر قیمت محصول:

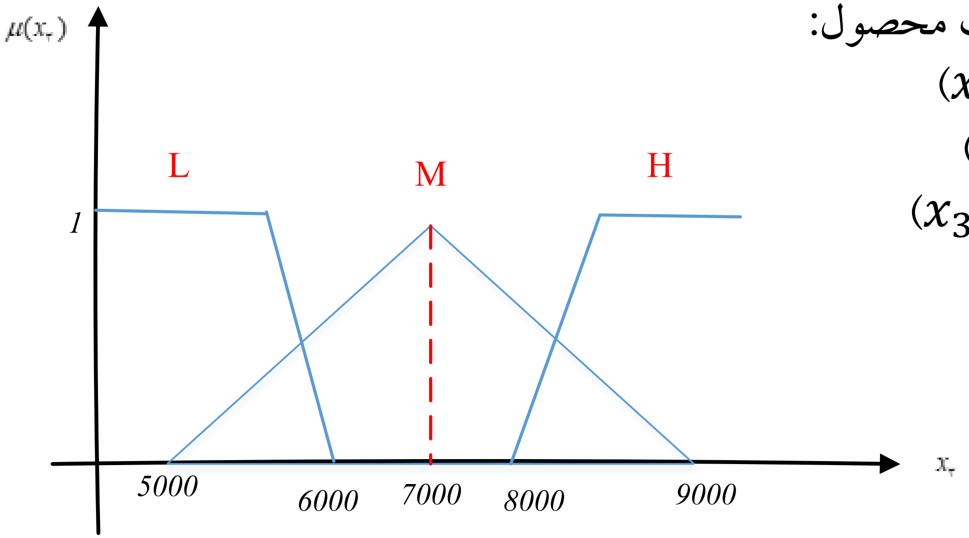
قیمت مواد اولیه (x_1)

تعرفه گمرکی (x_2)

هزینه حمل و نقل (x_3)

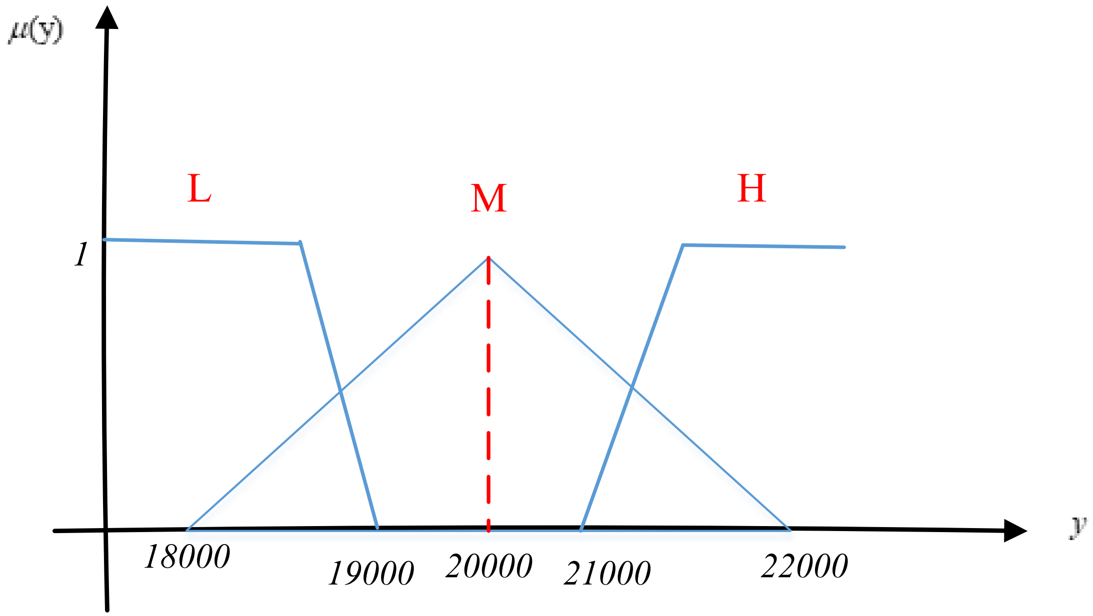






فازیسازی:

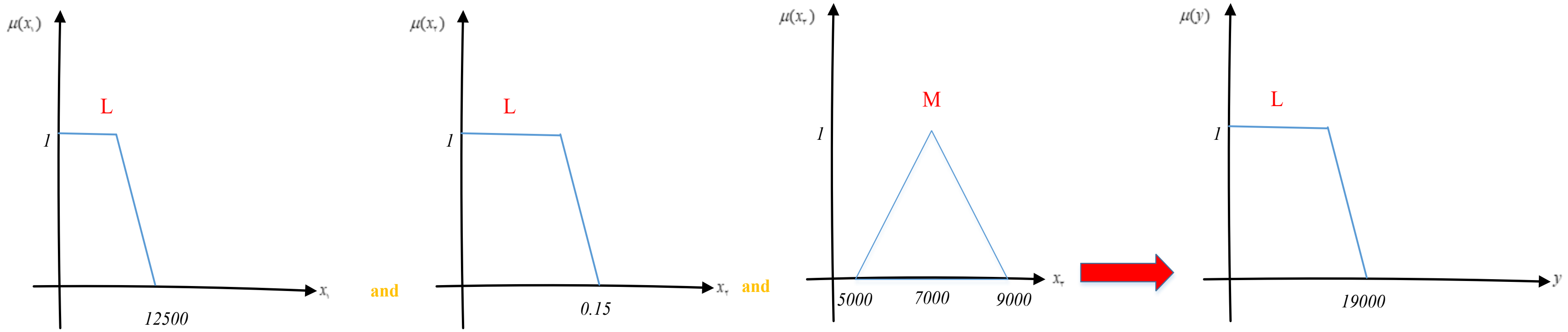
✓ تعیین خروجی: قیمت محصول



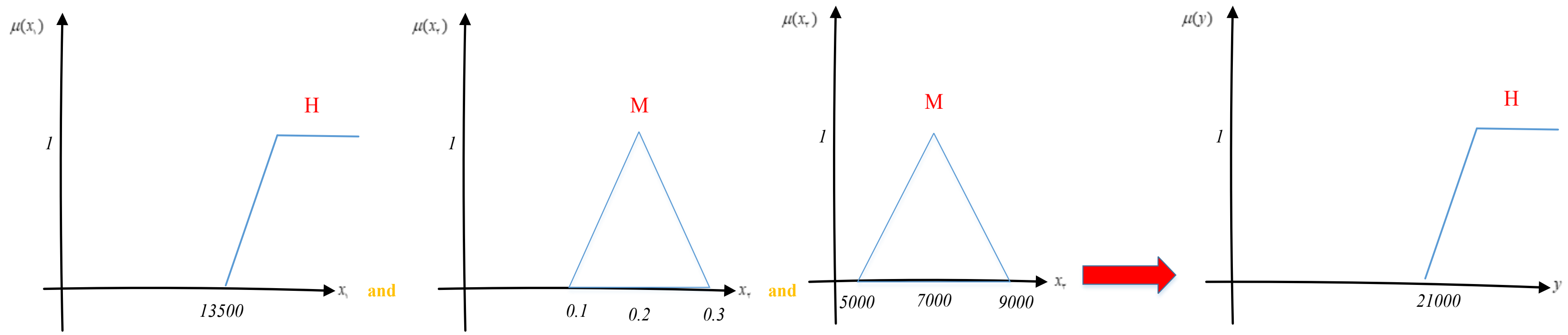
$$if\ x_1 = \tilde{A}_1\ and\ x_2 = \tilde{A}_2\ \text{and}\ x_3 = \tilde{A}_3 \rightarrow Then\ y = \tilde{B}$$

Fuzzy Rule Base:

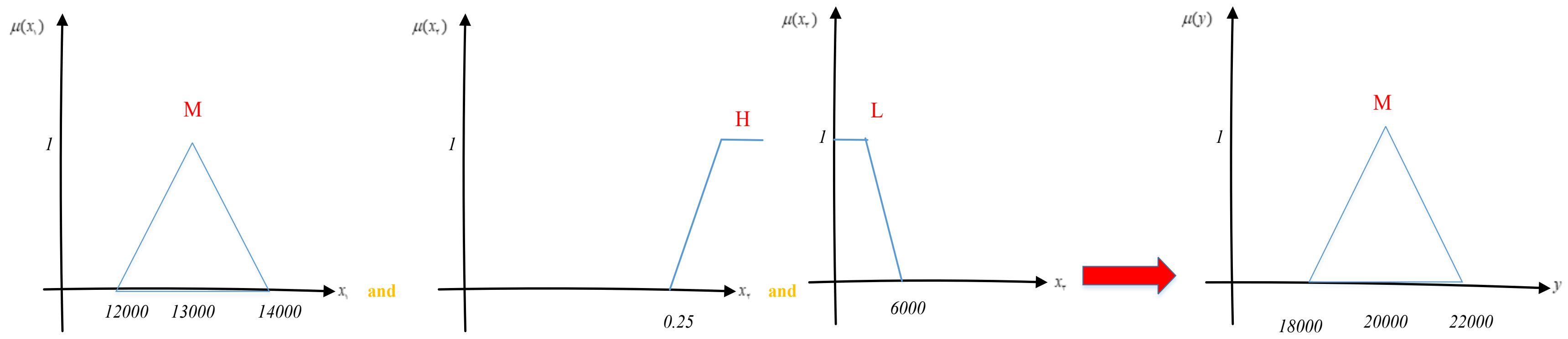
Rule 1.



Rule 2.



Rule 3.



⋮

Rule 27.

قیمت مواد اولیه (x_1=13700)
تعرفه گمرکی (x_2=0.27)
هزینه حمل و نقل (x_3=5500)

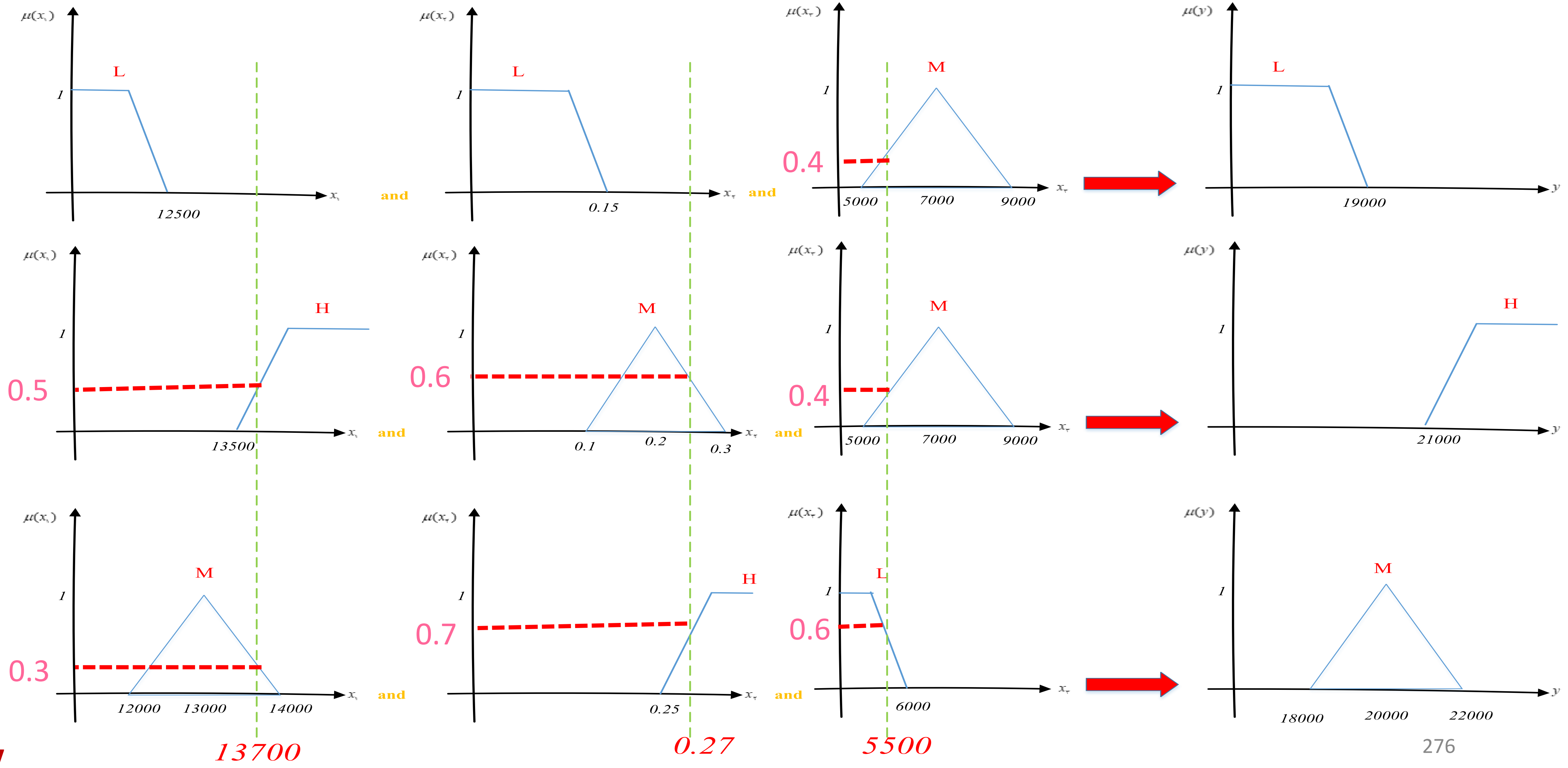
Rule 1.

Rule 2.

Rule 3.

⋮

Rule 27.

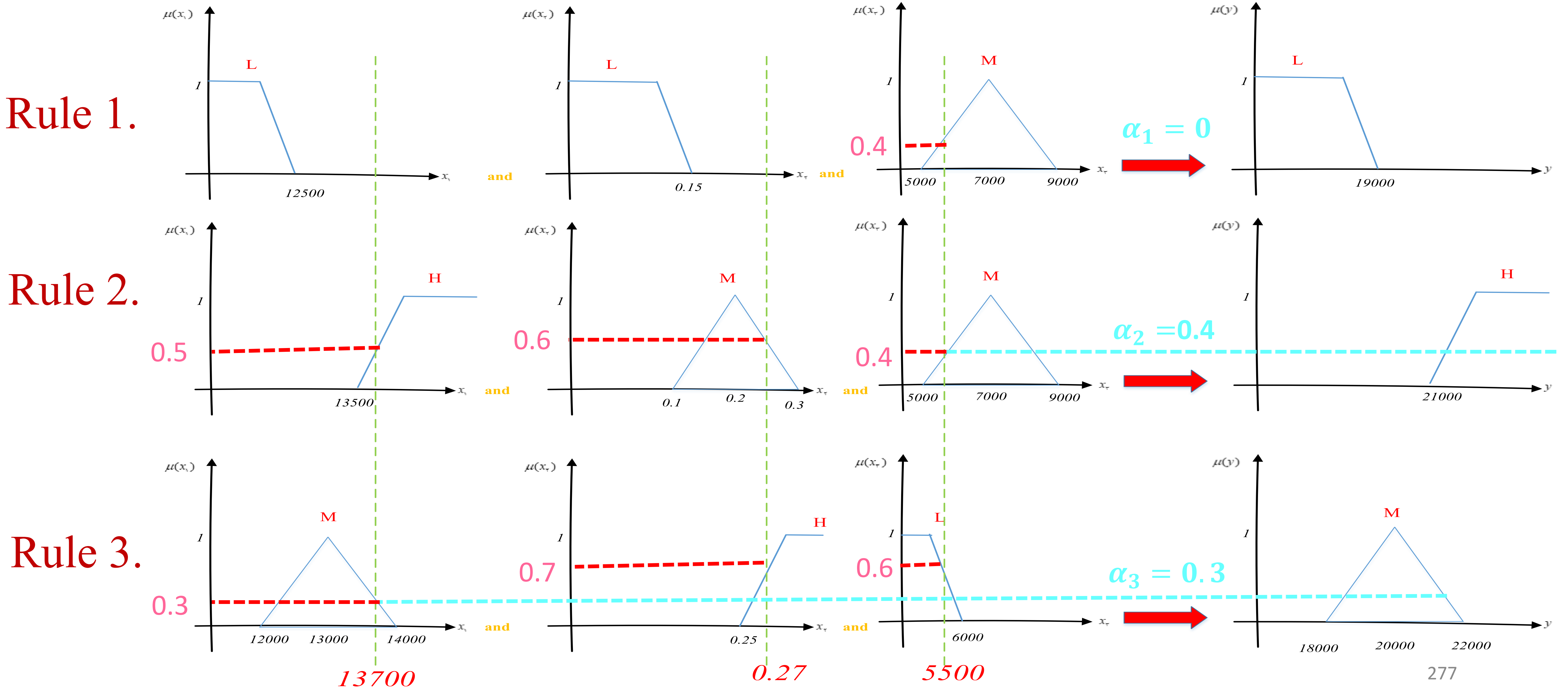


$$\alpha_r = \min\{\mu(x_i)\} \qquad x_i : input$$

$$\alpha_1 = \min\{0,0,0.4\} = 0$$

$$\alpha_2 = \min\{0.5,0.6,0.4\} = 0.4$$

$$\alpha_3 = \min\{0.3,0.7,0.6\} = 0.3$$

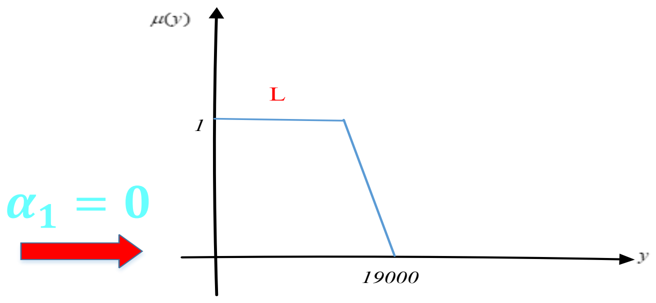


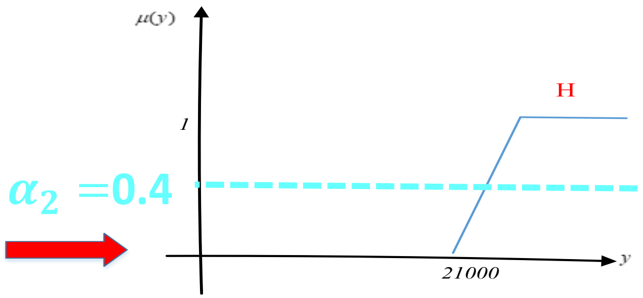
غیرفازیسازی به یک مقدار قطعی:

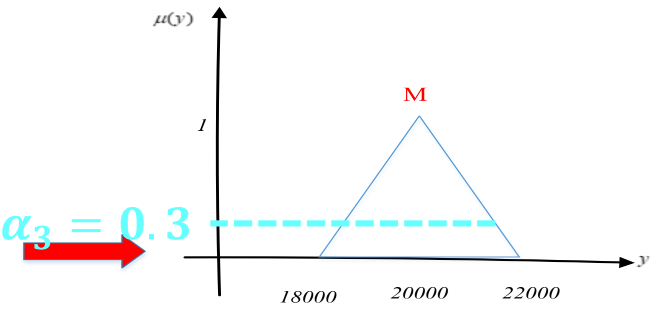
- ممکن است موقعیتهایی وجود داشته باشد که خروجی یک فرآیند فازی برخلاف مجموعه فازی نیاز به یک مقدار عددی یکتا داشته باشد.
- فرآیند غیرفازیسازی، عملا تبدیل یک مقدار فازی به مقداری دقیق است.
- خروجی یک فرآیند فازی می‌تواند اجتماع منطقی از دو یا چند تابع عضویت فازی باشد که بر روی مجموعه مرجع متغیر خروجی تعریف شده است.

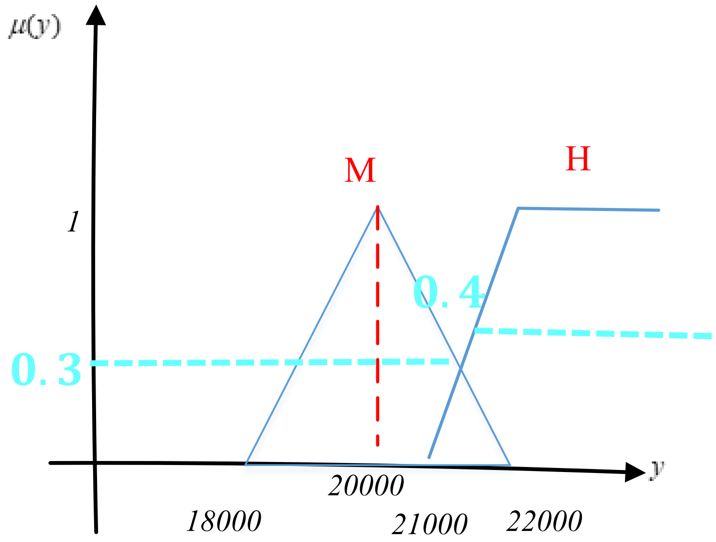
غیرفازیسازی به یک مقدار قطعی:

- در مثال قبل، خروجی فازی شامل سه بخش است:







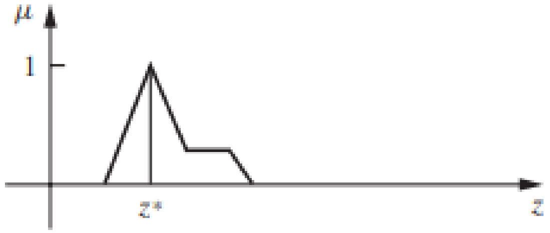


غیرفازیسازی به یک مقدار قطعی:

در سالهای اخیر، روشهای بسیاری برای غیرفازیسازی توابع خروجی فازی (یعنی توابع عضویت خروجی) پیشنهاد شده است. ما در اینجا هفت روش مختلف را توضیح می‌دهیم.

۱- روش درجه بیشینه: روش درجه عضویت بیشینه یا درجه عضویت حداکثر که همچنین از آن بعنوان *روش ارتفاع* یاد می‌شود، محدود به توابع خروجی قله‌دار است.
به عبارت دیگر، در این روش یک مجموعه فازی تبدیل به یک عدد کلاسیک می‌شود؛ عددی که بیشترین یا حداکثر درجه عضویت را در مجموعه فازی دارد.

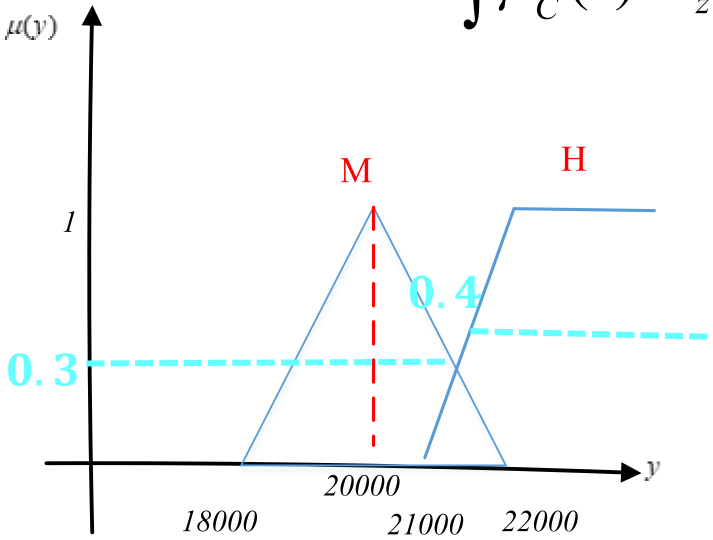
$$\mu_{\tilde{C}}(z^*) \geq \mu_{\tilde{C}}(z)$$
$$\forall z \in Z$$

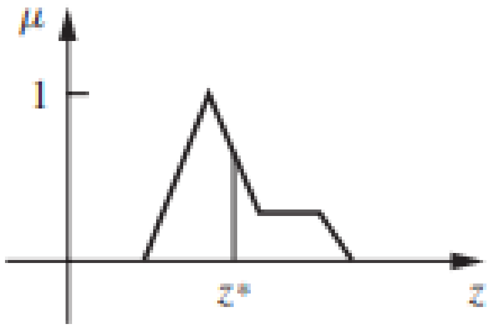


غیرفازیسازی به یک مقدار قطعی:

۲- **روش مرکزیت:** این روش (که به آن مرکز سطح یا مرکز ثقل نیز گفته می‌شود) روشی شایع و جذاب در میان سایر روشهای غیرفازیسازی است. بیان جبری این روش بصورت زیر است.

$$z^* = \frac{\int \mu_{\tilde{C}}(z)\ .\ z\, d_z}{\int \mu_{\tilde{C}}(z)\ d_z}$$





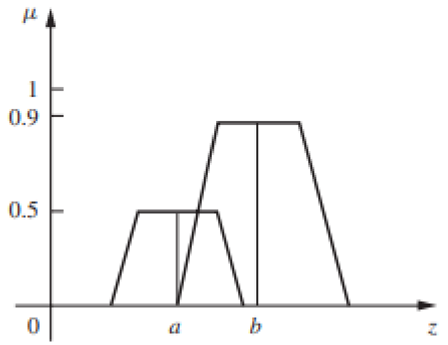
جاییکه $\int$ نماد انتگرال جبری می‌باشد.

غیرفازیسازی به یک مقدار قطعی:

۳- روش میانگین موزون: روش میانگین موزون به دلیل کارآمدی بسیار بالای محاسباتی یکی از روشهای پر کاربرد است. البته یک محدودیت مهم این روش آنست که معمولاً برای توابع عضویت خروجی متقارن مناسب است. بیان ریاضی این روش بصورت ذیل می‌باشد.

$$z^* = \frac{\sum \mu_{\tilde{C}}(\overline{z}) \cdot \overline{z}}{\sum \mu_{\tilde{C}}(\overline{z})}$$

جاییکه Σ نماد جمع جبری می‌باشد و $\bar{z}$ مرکزیت هر تابع عضویت متقارن است.

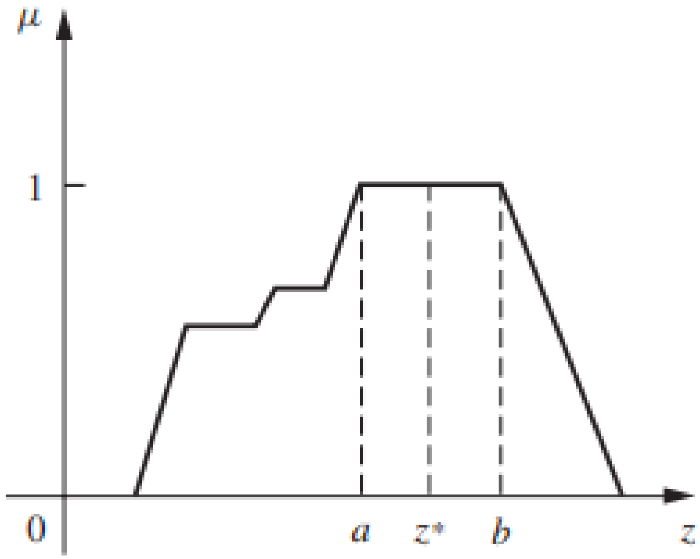


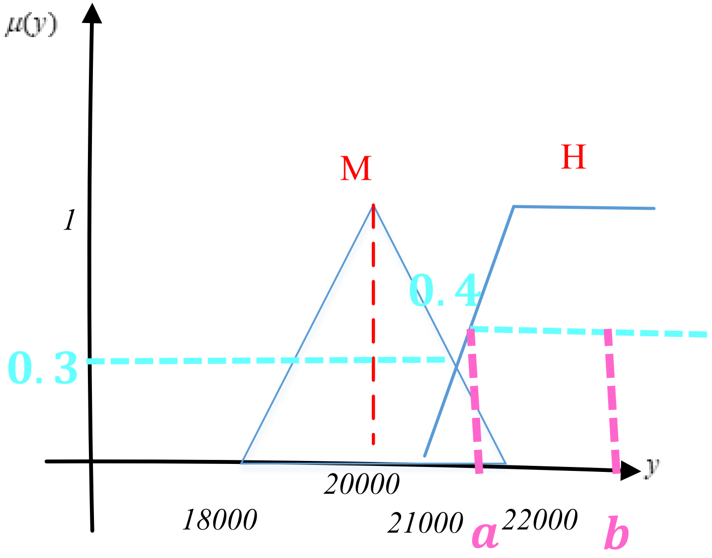
$$z^* = \frac{a(0.5) + b(0.9)}{0.5 + 0.9}.$$

غیرفازیسازی به یک مقدار قطعی:

۴ - روش میانگین درجات بیشین: این روش (که به *میانه* بیشین نیز معروف است) ارتباط نزدیکی با روش اول دارد، با این تفاوت که ناحیه با حداکثر درجه عضویت، محدود به یک نقطه نیست (یعنی حداکثر عضویت می‌تواند یک سطح باشد نه یک نقطه یکتا). بیان جبری این روش بصورت زیر است.

$$z^* = \frac{a+b}{2}$$

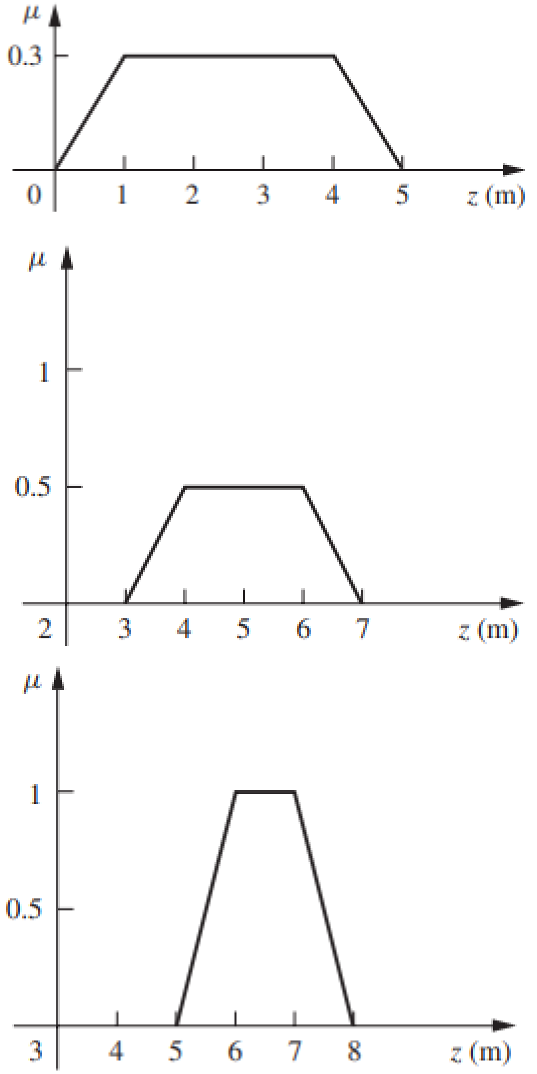


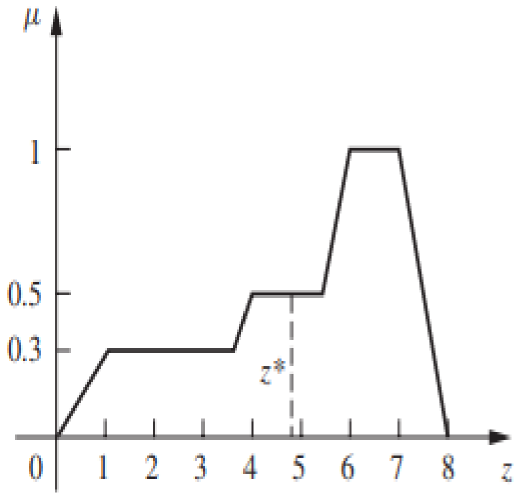


فصل هفتم

توصیفهای زبانی و اشکال تحلیلی آنها

غیرفازیسازی





۱- روش درجه بیشینه:

۲- روش مرکزیت: (مرکز ثقل)

$$z^* = \frac{\int \mu_{\tilde{C}}(z) \,.\, z \, d_z}{\int \mu_{\tilde{C}}(z) \, d_z}$$

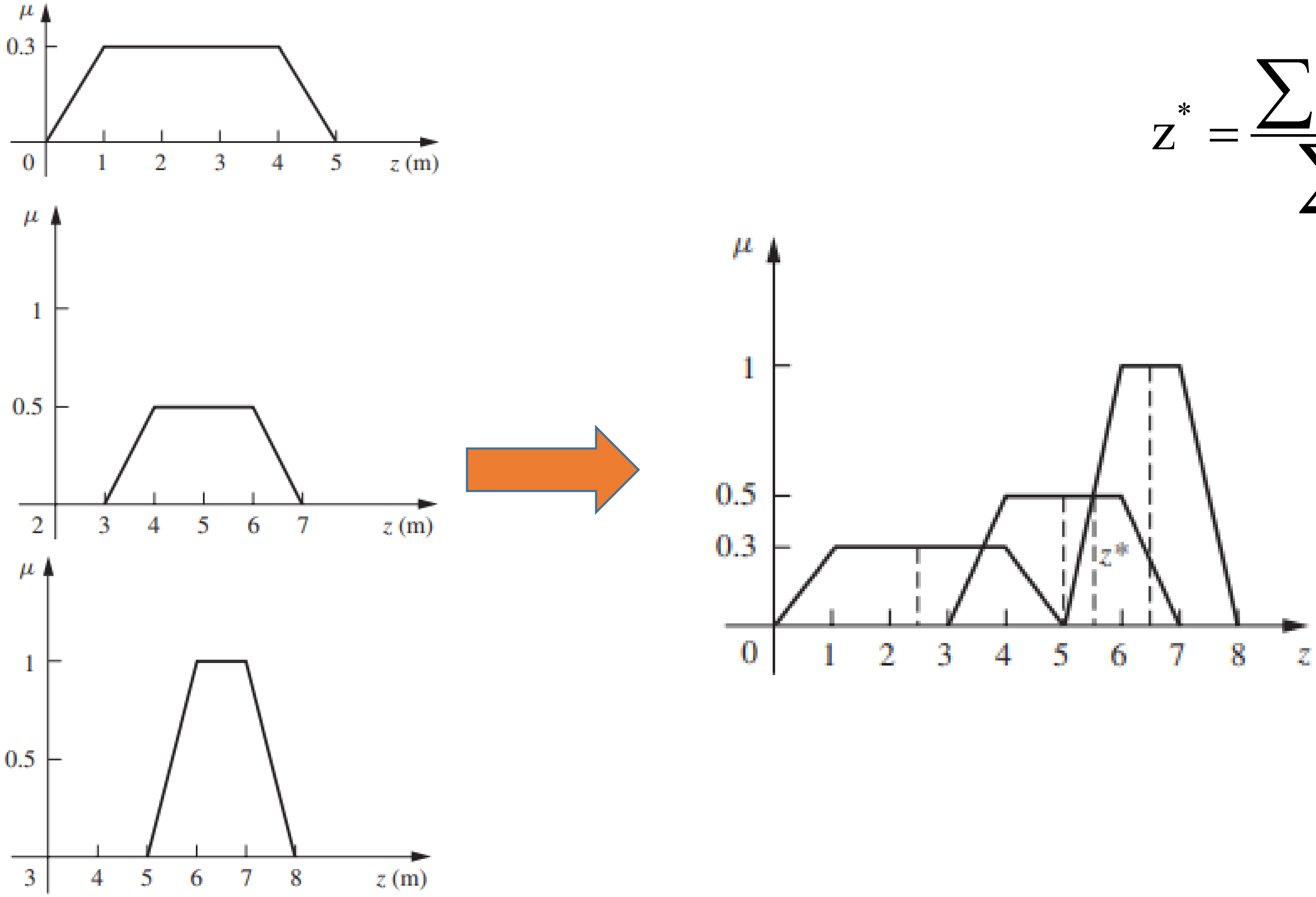
$$= \left[\int_0^1 (0.3z)z\,dz + \int_1^{3.6} (0.3)z\,dz + \int_{3.6}^4 \left(\frac{z-3.0}{2}\right) z\,dz + \int_4^{5.5} (0.5)z\,dz + \int_{5.5}^6 (z-5)z\,dz + \int_6^7 z\,dz + \int_7^8 (8-z)\,z\,dz\right]$$

$$\div \left[\int_0^1 (0.3z)\,dz + \int_1^{3.6} (0.3)\,dz + \int_{3.6}^4 \left(\frac{z-3.0}{2}\right) dz + \int_4^{5.5} (0.5)\,dz + \int_{5.5}^6 (z-5)\,dz + \int_6^7 dz + \int_7^8 (8-z)\,dz\right]$$

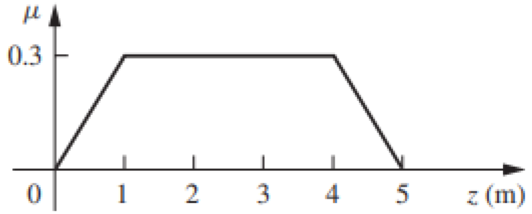
$$= 4.9 \text{ m},$$

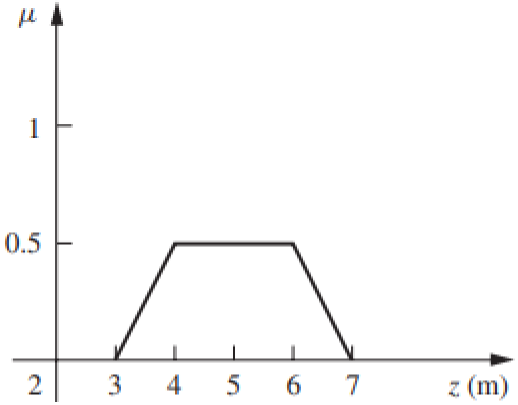
۳- روش میانگین موزون:

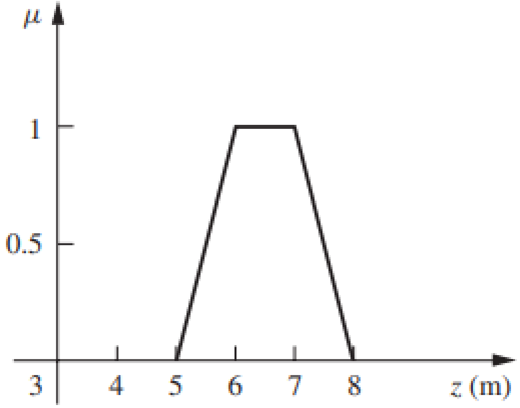
$$z^* = \frac{\sum \mu_{\tilde{C}}(\overline{z}) \cdot \overline{z}}{\sum \mu_{\tilde{C}}(\overline{z})}$$



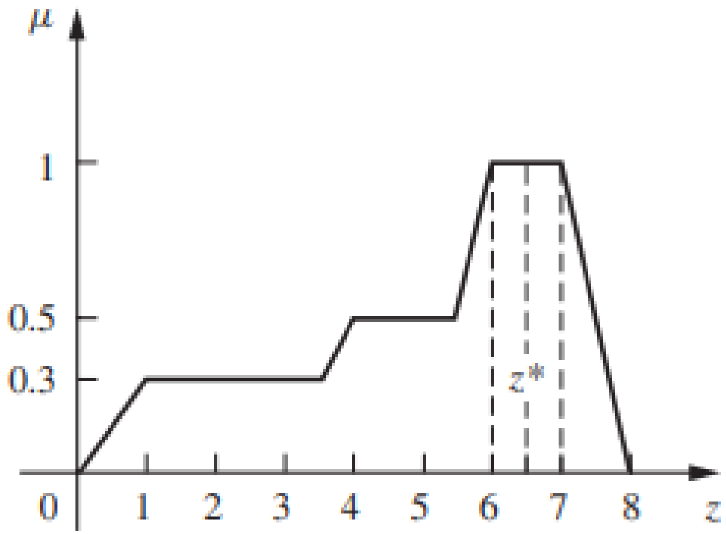
$$z^* = \frac{(0.3 \times 2.5) + (0.5 \times 5) + (1 \times 6.5)}{0.3 + 0.5 + 1} = 5.41 \text{ m},$$







۴ - روش میانگین درجات بیشین:



$$z^* = \frac{a+b}{2}$$

$$(۶ + ۷) / ۲ = ۶.۵$$

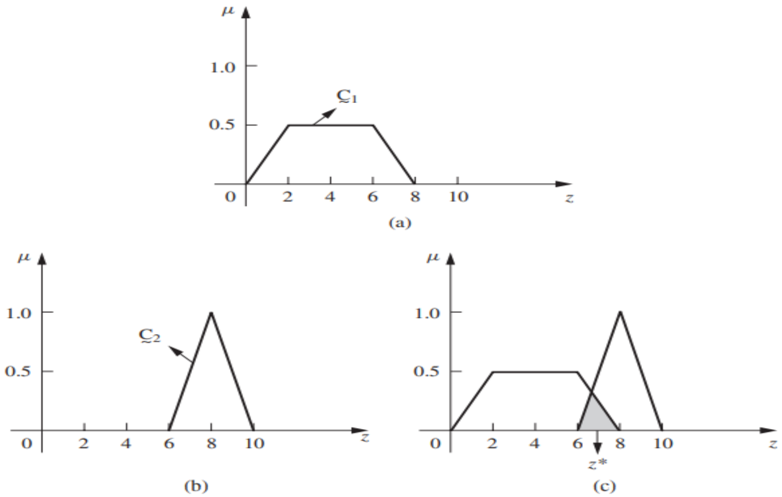
همانگونه که مشاهده می‌کنید نتایج یکسانی از روشهای مختلف غیرفازیسازی حاصل نشده است. این موضوع بیانگر اینست که انتخاب هر یک از این روشها باید با دقت و متناسب با موقعیت هر مسئله صورت گیرد.

این روش شبیه به روش میانگین موزون، با این تفاوت که در روش مرکز مجموع، وزنها سطوحی از توابع عضویت مربوطه هستند؛ در حالی که در روش میانگین موزون، وزنها درجات عضویت هر یک از توابع بودند.

غیرفازیسازی به یک مقدار قطعی:

۵- روش مرکز مجموع: این روش به دلیل کارآمدی بسیار بالای محاسباتی یکی از روشهای پر کاربرد است. همچنین، این روش محدود به توابع عضویت متقارن نیست. روش مرکز مجموع شامل جمع جبری همه مجموعه‌های فازی خروجی همچون $\tilde{C}_۱$ و $\tilde{C}_۲$، به جای اجتماع آنهاست. از جمله معایب این روش آنست که ناحیه‌های مشترک یا متقاطع دو بار محاسبه می‌شوند. بعلاوه روش فوق نیازمند یافتن مرکزیت هر یک از توابع عضویت است. با فرض آنکه Z^* مقدار غیرفازی این روش باشد آنگاه به زبان ریاضی داریم:

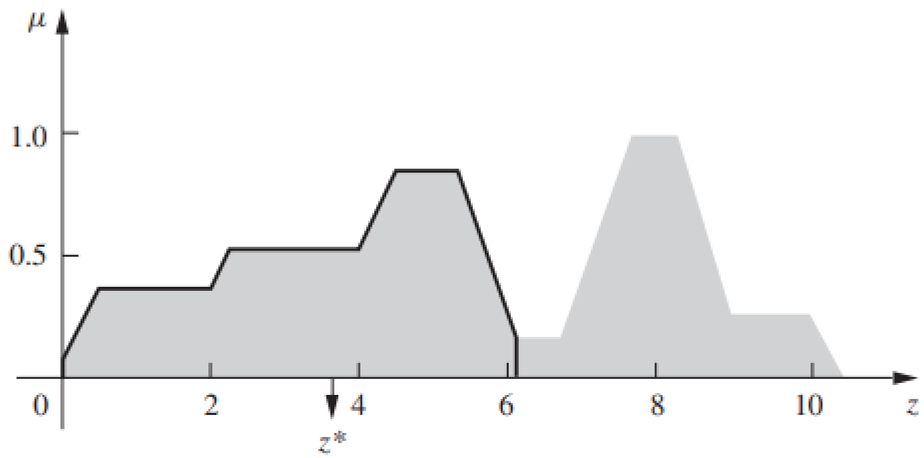
$$z^* = \frac{\sum_{k=۱}^{n} \mu_{\tilde{C}_k}(z)\int_z \bar{z}\, d_z}{\sum_{k=۱}^{n} \mu_{\tilde{C}_k}(z)\int_z d_z}$$



غیرفازیسازی به یک مقدار قطعی:

۶- *روش مرکز بزرگترین سطح:* اگر مجموعه فازی خروجی حداقل دو ناحیه محدب داشته باشد، سپس از مرکز ثقل آن ناحیه فازی محدب که بیشترین مساحت را دارد برای بدست آوردن مقدار غیرفازی، یعنی Z^*، استفاده می‌شود.

$$z^* = \frac{\int \mu_{\tilde{C}_m}(z) \cdot z \, d_z}{\int \mu_{\tilde{C}_m}(z) \, d_z}$$



$\tilde{C}_m$ ناحیه محدبی است که بزرگترین سطح تشکیل $\tilde{C}_k$ را دارد. این شرایط در مواردی اعمال می‌شود که خروجی کلی، یعنی $\tilde{C}_k$ ، غیرمحدب باشد. در مواردی که $\tilde{C}_k$ محدب است، Z^* با روش مرکز بزرگترین سطح همان مقداری است که با روش مرکزیت تعیین می‌شود (زیرا در این صورت فقط یک ناحیه محدب وجود دارد).

غیرفازیسازی به یک مقدار قطعی:

۷- *روش اولین (یا آخرین) بیشین:* این روش از خروجی کلی یا اجتماع تمام مجموعه‌های فازی خروجی، یعنی $\tilde{C}_k$، برای تعیین کمترین مقدار دامنه (Z) با حداکثر درجه عضویت در $\tilde{C}_k$ استفاده می‌کند. معادلات Z^* به صورت زیر است.

نخست، بزرگترین ارتفاع در اجتماع (که با $hgt(\tilde{C}_k)$ مشخص شده) تعیین می‌شود.

$$hgt(\tilde{C}_k) = \sup_{z \in Z} \mu_{\tilde{C}_k}(z)$$

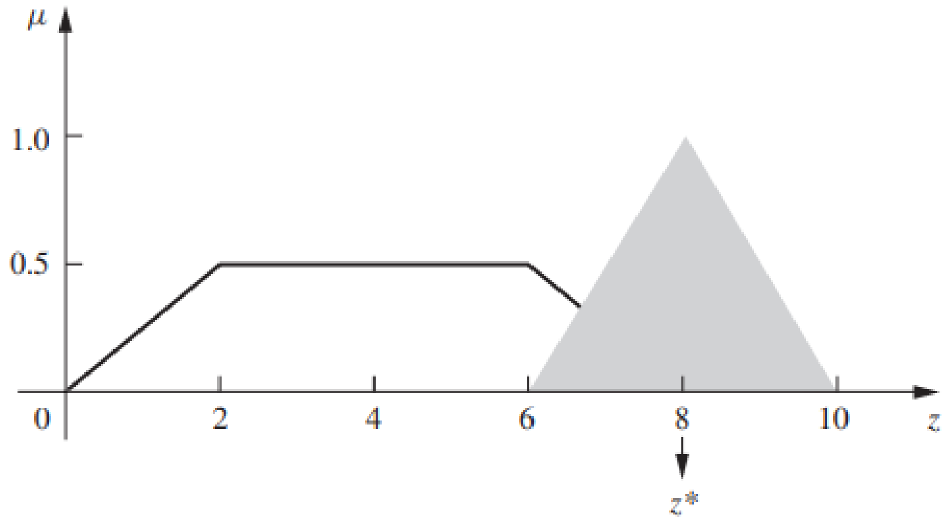
❖ سپس، اولین بیشین (یا اولِ قله) بدست می‌آید.

$$Z^* = \inf_{z \in Z}\{z \in Z | \mu_{\tilde{C}_k}(z) = hgt(\tilde{C}_k)\}$$

❖ جایگزینی برای این روش، آخرین بیشین (یا آخرِ قله) نامیده می‌شود و به صورت زیر بیان می‌شود.

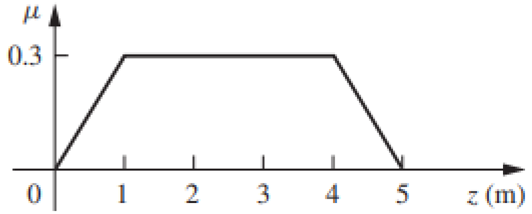
$$Z^* = \sup_{z \in Z}\{z \in Z | \mu_{\tilde{C}_k}(z) = hgt(\tilde{C}_k)\}$$

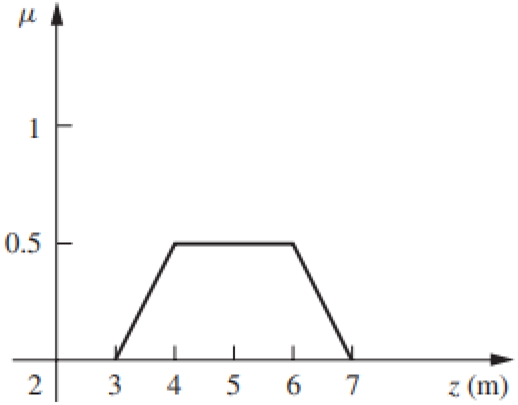
غیرفازیسازی به یک مقدار قطعی:

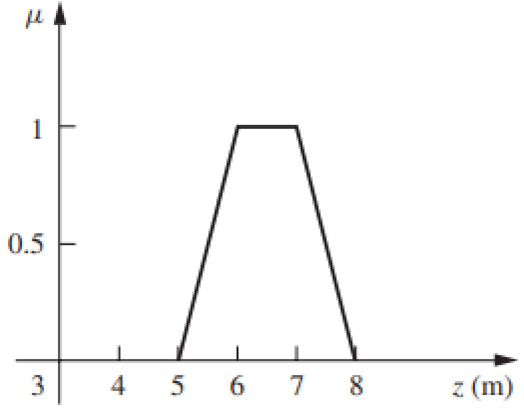


نماد sup نشاندهنده زِبَرینه است که عملا کمترین حد بالایی بوده و نماد inf نشاندهنده زیرینه است که بزرگترین حد پایینی می‌باشد.

همانطور که مشاهده می‌شود اولین بیشین همان آخرین بیشین است، زیرا تنها یک بیشینه متمایز وجود دارد.

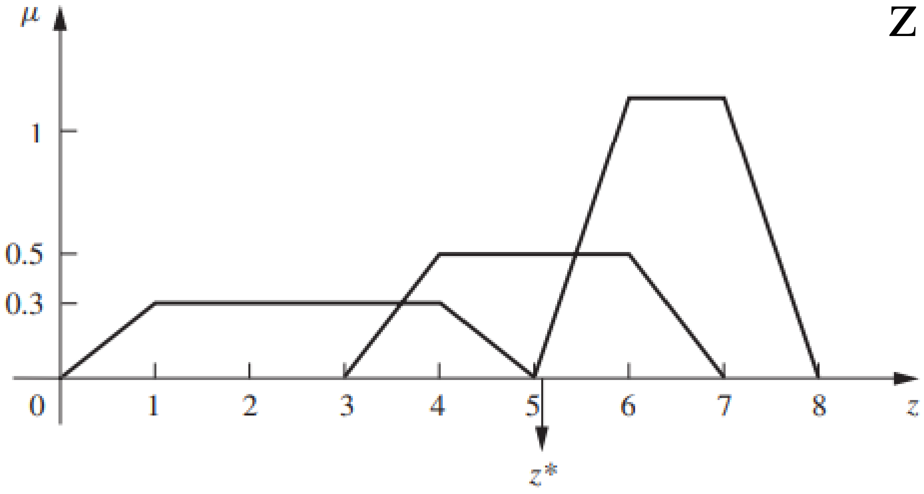






۵- روش مرکز مجموع:

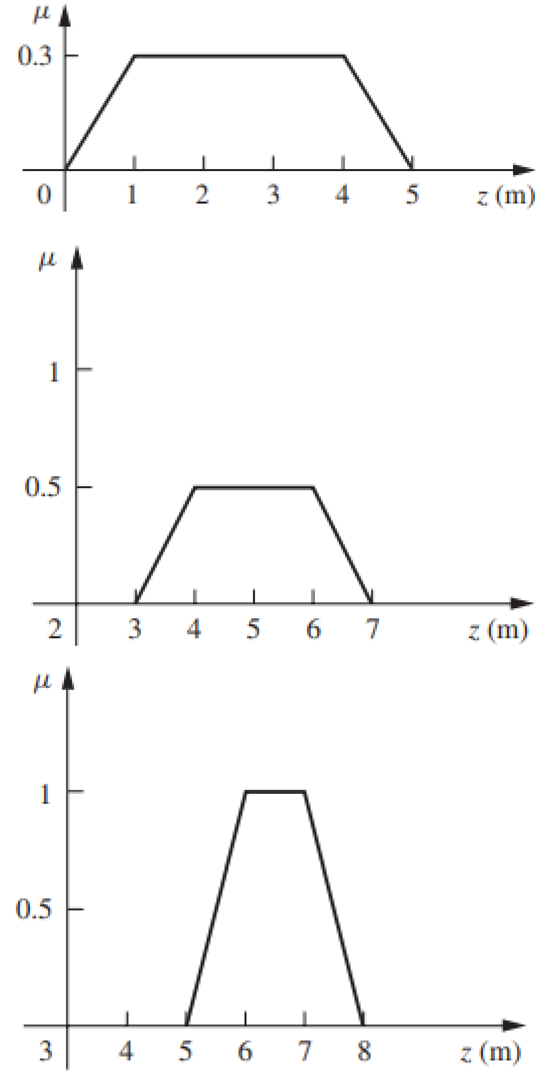
$$z^{*}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\mu_{\tilde{C}_k}(z)\int_{z}\overline{z}\,d_z}{\sum_{k=1}^{n}\mu_{\tilde{C}_k}(z)\int_{z}d_z}$$

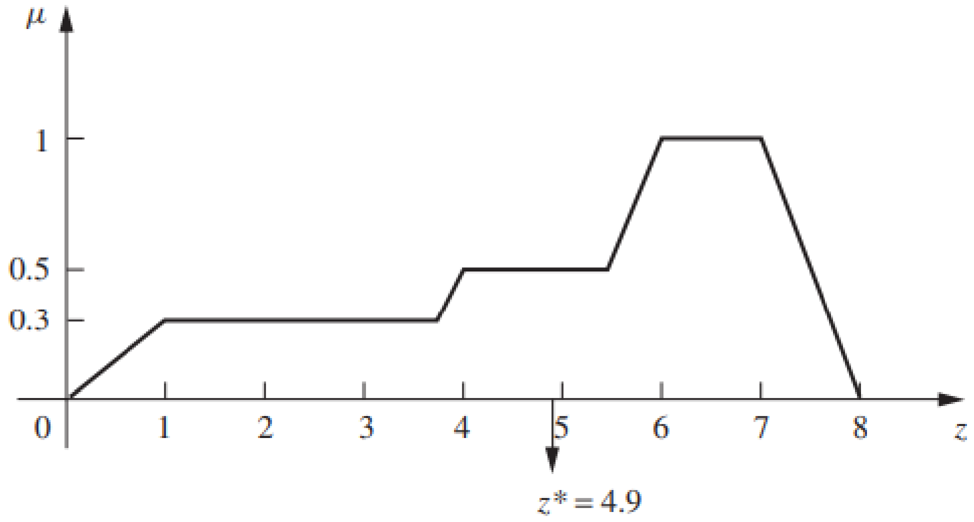


$$z^{*}=\frac{[2.5\times 0.5\times 0.3(3+5)+5\times 0.5\times 0.5(2+4)+6.5\times 0.5\times 1(3+1)]}{[0.5\times 0.3(3+5)+0.5\times 0.5(2+4)+0.5\times 1(3+1)]}$$

$$=5.0\,\text{m},$$

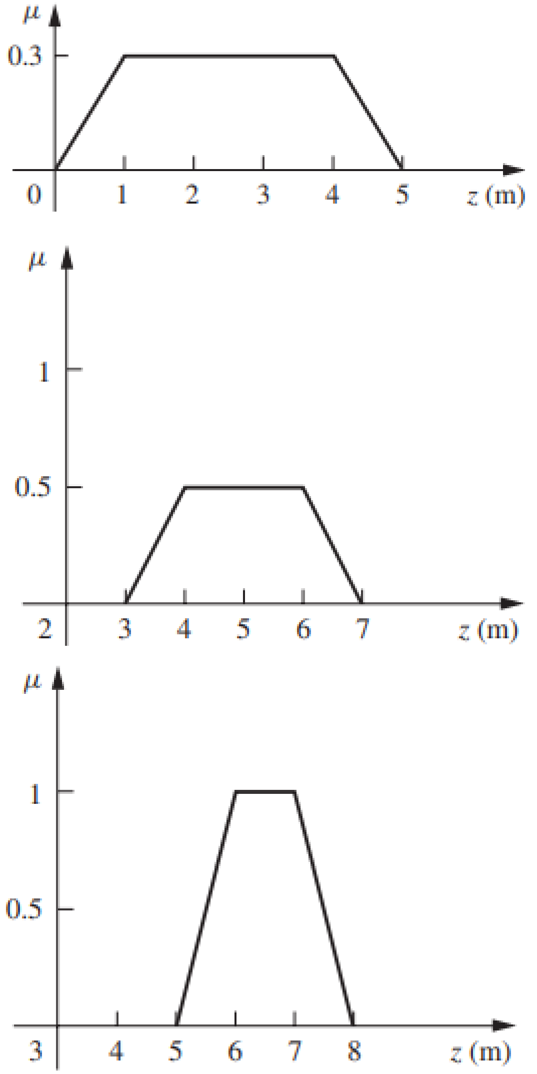
۶- روش مرکز بزرگترین سطح :

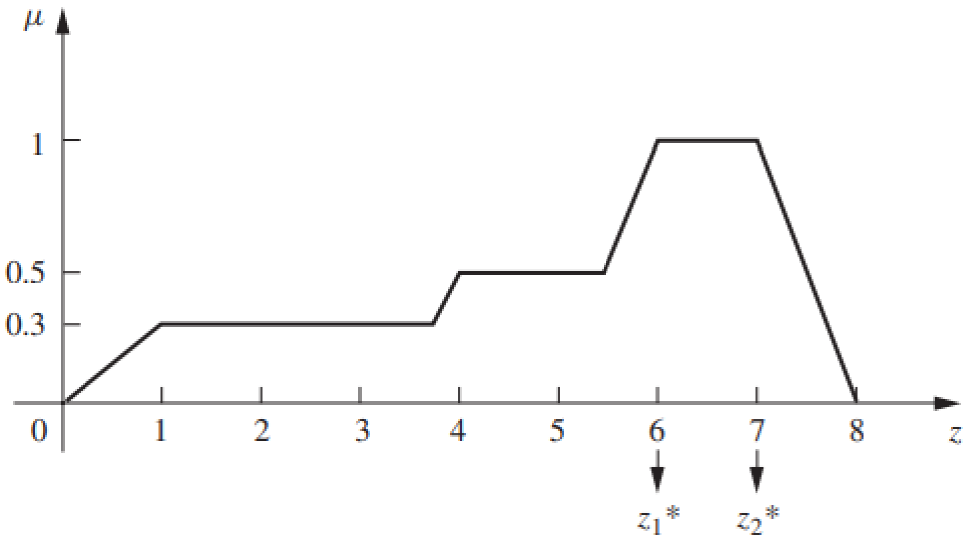




بر طبق روش مرکز بزرگترین سطح، نتیجه مشابهی (یعنی، $Z^* = ۴.۹$) با روش مرکز ثقل، حاصل می‌شود. زیرا با توجه به شکل، مجموعه فازی خروجی محدب است.

۷- روشهای اولین بیشین (اولِ قله) و آخرین بیشین (آخرِ قله):





$$Z_{۱}^{*} = ۶$$

$$Z_{۲}^{*} = ۷$$

فصل هشتم

برنامه ریزی ریاضی فازی

برنامه ریزی ریاضی فازی (Fuzzy Mathematical Programming)

۱. برنامه ریزی منعطف (Flexible Programming)

۲. برنامه ریزی امکانی (Possibilistic Programming)

$$\begin{aligned} &\max Z = Cx \\ &s.t.\!: \\ &\quad Ax \leq b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\widetilde{\max}\, Z = Cx \\ &s.t.\!: \\ &\quad Ax \,\widetilde{\leqq}\, b \end{aligned}$$

Flexible Programming

$$\begin{aligned} &\max Z = \tilde{C}x \\ &s.t.\!: \\ &\quad \tilde{A}x \leq \tilde{b} \end{aligned}$$

Possibilistic Programming

۱. برنامه ریزی منعطف (Flexible Programming)

الف) برنامه ریزی منعطف **متقارن**

$$\widetilde{\max} Z = Cx$$

$$s.t:$$

$$Ax \lesssim b$$

ب) برنامه ریزی منعطف **نامتقارن**

$$max\, Z = Cx$$

$$s.t:$$

$$Ax \tilde{\leq} b$$

```
Lingo Model - Lingo1
model:

max=5*x1+2*x2;

x1+3*x2<=15;
7*x1+x2<=10;
@gin(x1);
@gin(x2);

end
```

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              11.00000

  Variable           Value
        X1        1.000000
        X2        3.000000
```

الف) برنامه ریزی منعطف متقارن

مثال. شرکتی تولیدکننده صندلی و میز تحریر است. تولید هر کدام از انواع محصولات به الوار و نیروی کار ماهر در زمینه نجاری نیاز دارد. مقدار هر یک از منابع مورد نیاز برای تولید هر یک از انواع محصولات در جدول زیر آمده است:

منبع	صندلی (x_1)	میز تحریر (x_2)
الوار (فوت تخته)	۱	۳
زمان نجاری (ساعت)	۷	۱

در حال حاضر، ۱۵ فوت تخته از الوارها و ۱۰ ساعت زمان نجاری موجود است. سود فروش هر واحد صندلی ۵ دلار و هر واحد میز تحریر ۲ دلار است. شرکت می خواهد کل سود خود را به حداکثر برساند.

$$max\, Z = 5x_1 + 2x_2$$

$s.t:$

$$x_1 + 3x_2 \leq 15$$
$$7x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\widetilde{\max}\, Z = 5x_1 + 2x_2 \qquad \boxed{P_0 = 3}$$

$s.t:$

$$x_1 + 3x_2 \;\tilde{\leq}\; 15 \qquad \boxed{P_1 = 5}$$
$$7x_1 + x_2 \;\tilde{\leq}\; 10 \qquad \boxed{P_2 = 3}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

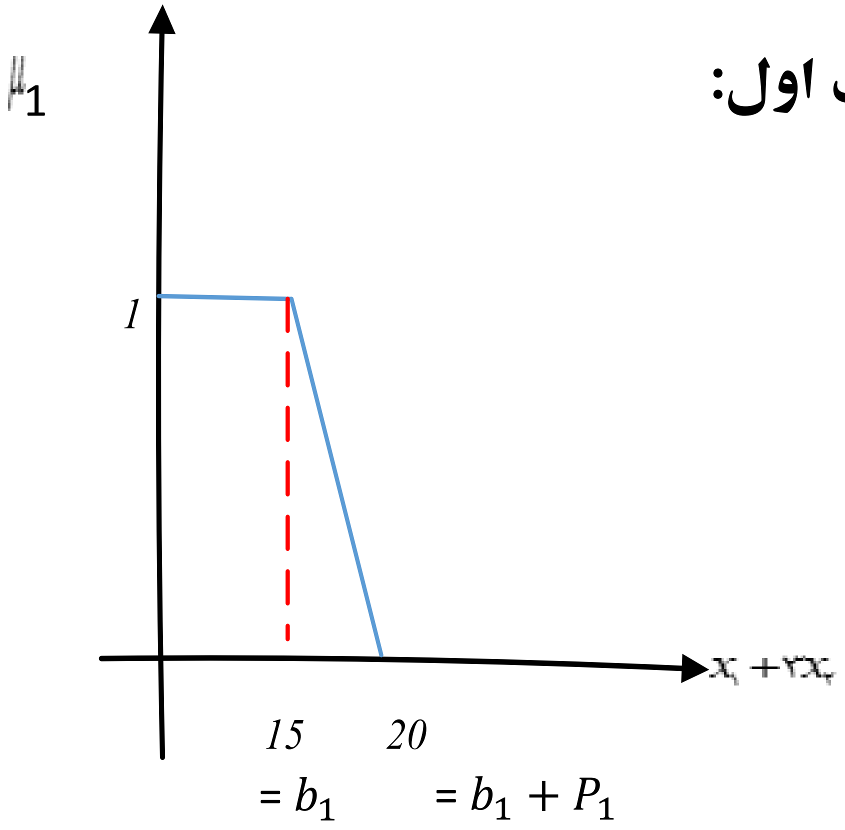
تفسیر محدودیت اول:

$$\widetilde{\max}\, Z = 5x_1 + 2x_2$$

$s.t:$

$$x_1 + 3x_2 \mathbin{\tilde{\leq}} 15$$
$$7x_1 + x_2 \mathbin{\tilde{\leq}} 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\boxed{P_1 = 5}$$



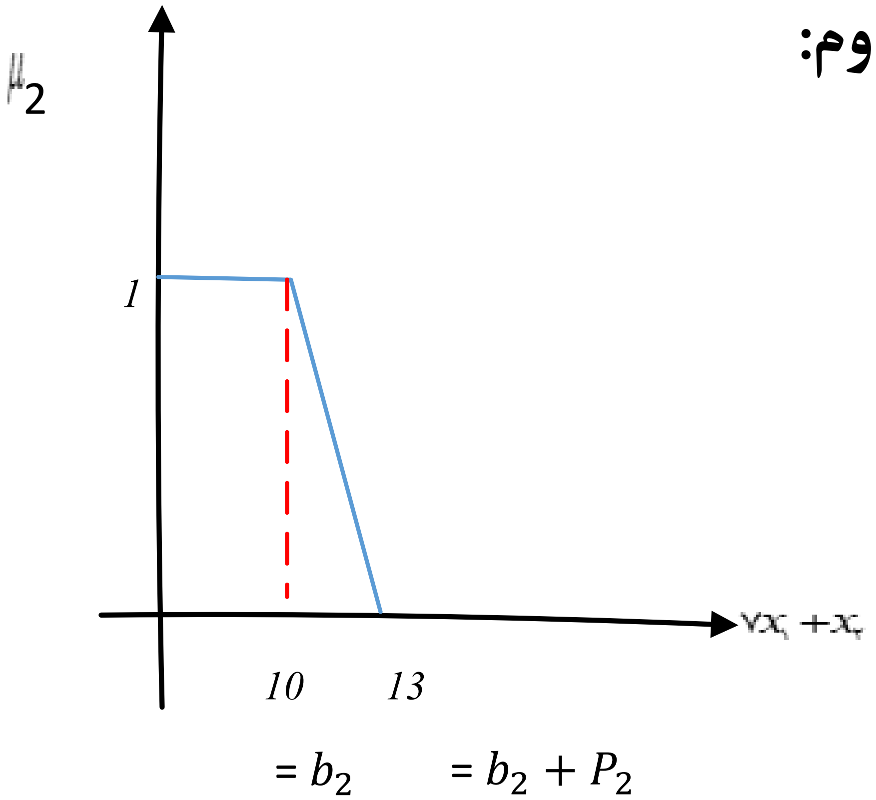
تفسیر محدودیت دوم:

$$\widetilde{\max}\, Z = 5x_1 + 2x_2$$

s.t:

$$x_1 + 3x_2 \ \tilde{\lesssim}\ 15$$
$$7x_1 + x_2 \ \tilde{\lesssim}\ 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\boxed{P_2 = 3}$$



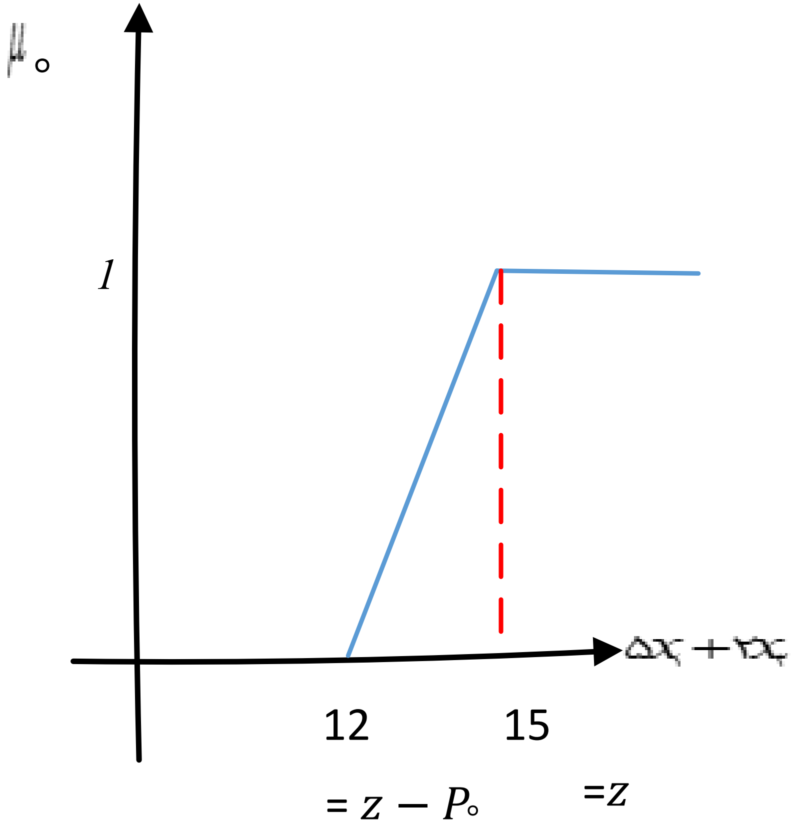
تفسیر تابع هدف:

$$\widetilde{\max}\, Z = 5x_1 + 2x_2$$

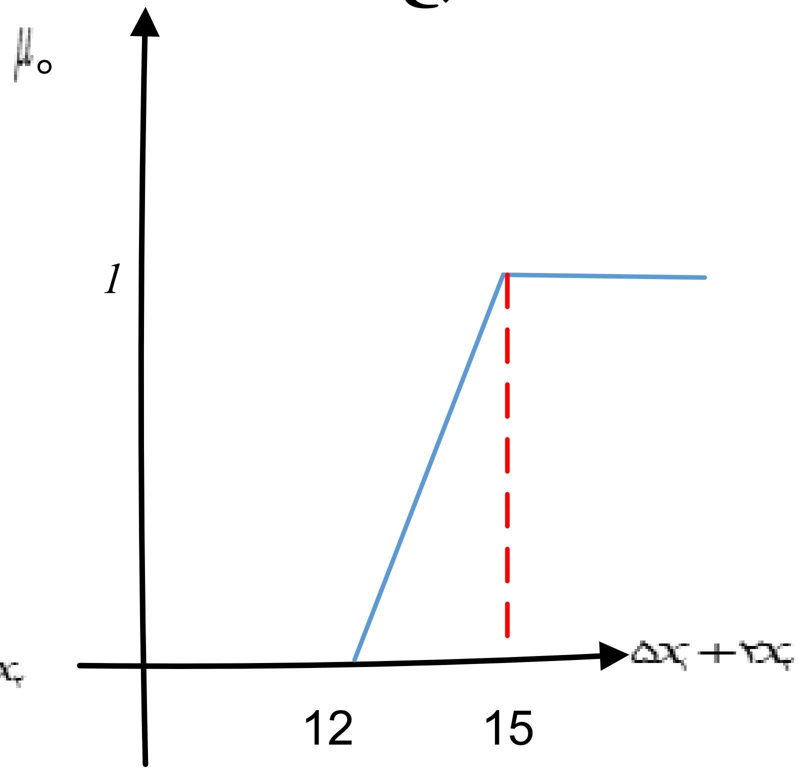
$s.t:$

$$x_1 + 3x_2 \widetilde{\lesssim} 15$$
$$7x_1 + x_2 \widetilde{\lesssim} 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

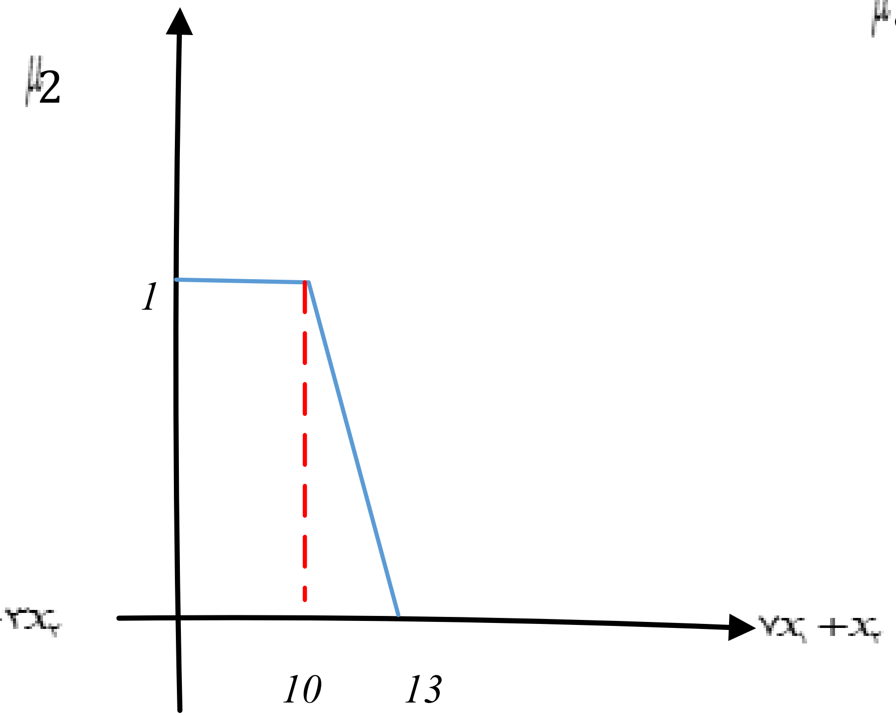
$$\boxed{P_\circ = 3}$$



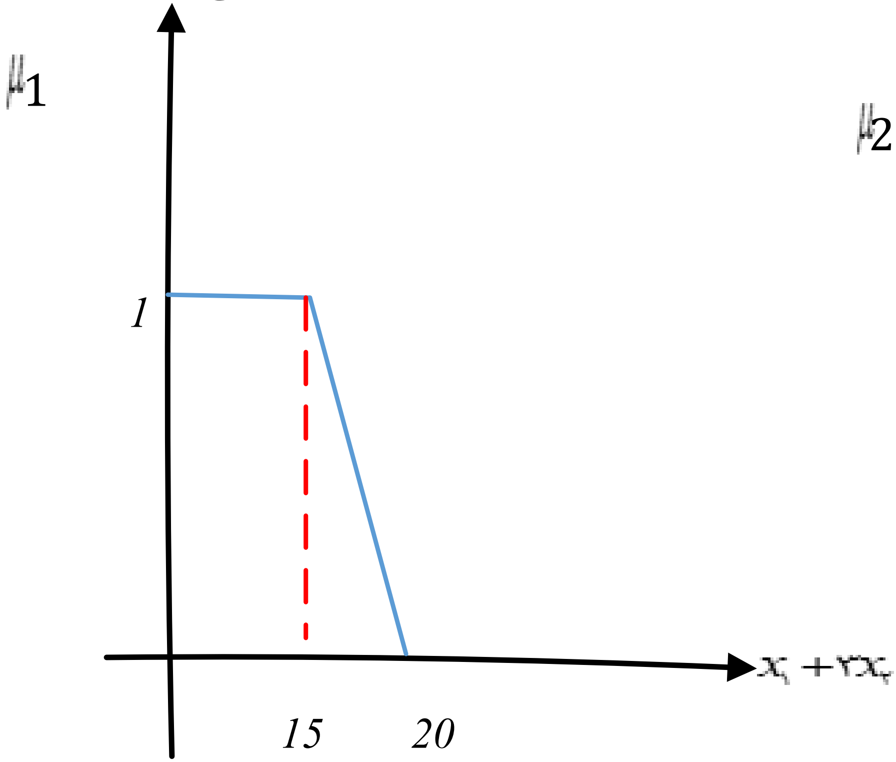
تابع مطلوبیت
تابع هدف



تابع مطلوبیت
محدودیت دوم



تابع مطلوبیت
محدودیت اول



$$\max \lambda$$
$$\lambda \le \mu_\circ \qquad \lambda \le \mu_1 \qquad \lambda \le \mu_2 \qquad X \ge 0 \qquad 0 \le \lambda \le 1$$

$$\lambda = \min\{\mu_\circ, \mu_1, \mu_2\}$$

$$max\lambda$$

$$\lambda \le \mu_\circ = \frac{5x_1 + 2x_2 - 12}{15 - 12}$$

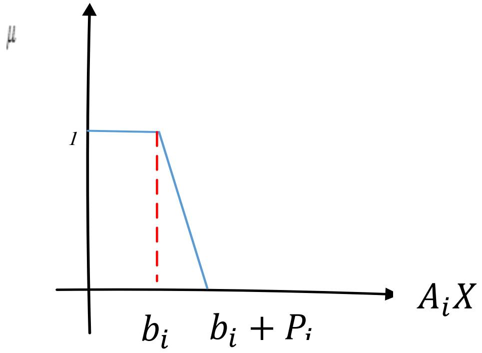
$$\lambda \le \mu_1 = \frac{20 - (x_1 + 3x_2)}{20 - 15}$$

$$\lambda \le \mu_2 = \frac{13 - (7x_1 + x_2)}{13 - 10}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$
$$0 \le \lambda \le 1$$

$\boldsymbol{A_i x \lesssim b_i}$:

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & A_i X \le b_i \\ \dfrac{b_i + P_i - A_i X}{b_i + P_i - b_i} & b_i \le A_i X \le b_i + P_i \\ 0 & A_i X \ge b_i + P_i \end{cases}$$



فصل هشتم

برنامه ریزی ریاضی فازی

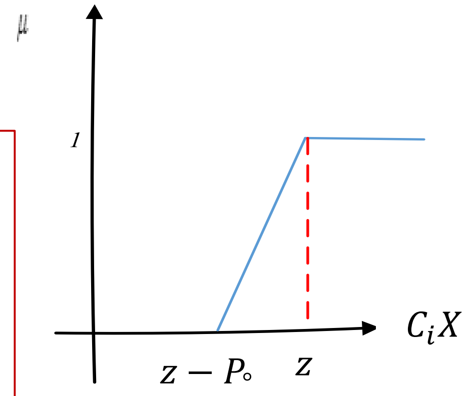
برنامه ریزی منعطف

$$\begin{aligned} &\max \lambda \\ &\lambda \le \mu_\circ \\ &\lambda \le \mu_1 \\ &\lambda \le \mu_2 \\ &X \ge 0 \\ &0 \le \lambda \le 1 \end{aligned} \quad \Bigg\} \quad \lambda = \min\{\mu_\circ, \mu_1, \mu_2\}$$

$$\begin{aligned} &max\lambda \\ &\lambda \le \mu_\circ = \frac{5x_1 + 2x_2 - 12}{15 - 12} \\ &\lambda \le \mu_1 = \frac{20 - (x_1 + 3x_2)}{20 - 15} \\ &\lambda \le \mu_2 = \frac{13 - (7x_1 + x_2)}{13 - 10} \\ &x_1, x_2 \ge 0 \\ &0 \le \lambda \le 1 \end{aligned}$$

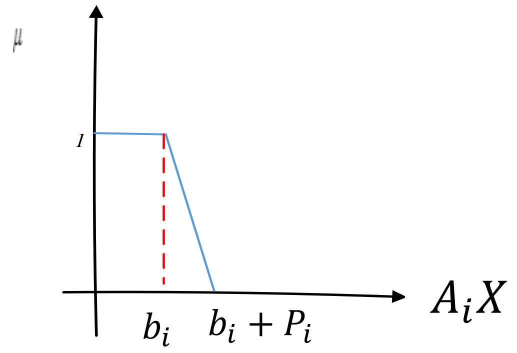
$\boldsymbol{C_i x \gtrsim Z}$ **:**

$$\mu_\circ(x) = \begin{cases} 1 & C_iX \ge Z \\ \dfrac{C_iX - (Z - P_\circ)}{Z - (Z - P_\circ)} & Z - P_\circ \le C_iX \le Z \\ 0 & C_iX \le Z - P_\circ \end{cases}$$



ب) برنامه ریزی منعطف **نامتقارن**

$$\max Z = Cx$$
$$s.t:$$
$$Ax \lesssim b$$



$\boldsymbol{A_i x \lesssim b_i}$ **:**

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & A_iX \le b_i \\ \dfrac{b_i + P_i - A_iX}{b_i + P_i - b_i} & b_i \le A_iX \le b_i + P_i \\ 0 & A_iX \ge b_i + P_i \end{cases}$$

$$\mu_i(x) = \frac{b_i + P_i - A_iX}{b_i + P_i - b_i} \ge \alpha \Rightarrow A_iX \le b_i + (1-\alpha)P_i$$

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

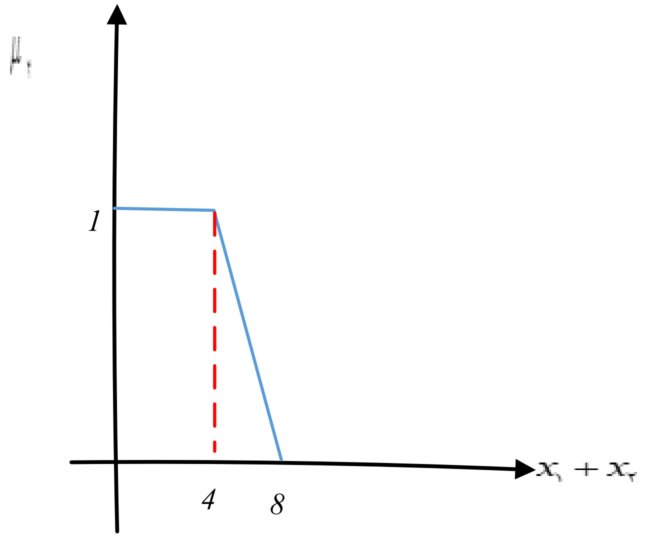
$s.t:$

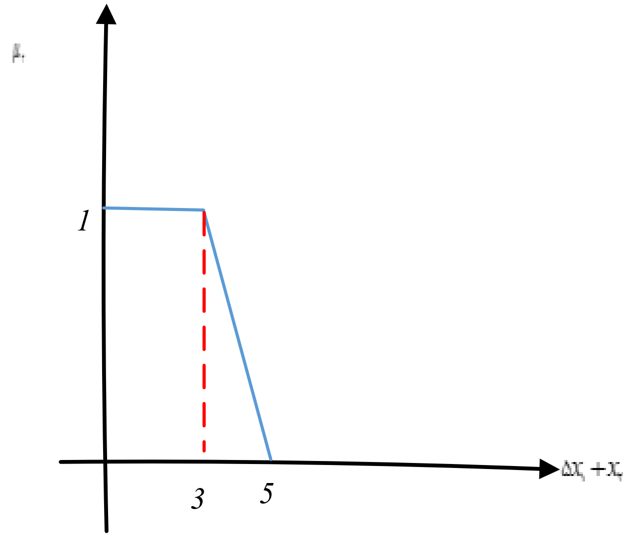
$$x_1 \leq 3$$

$$x_1 + x_2 \ \tilde{\lesssim}\ 4 \qquad \boxed{P_2 = 4}$$

$$5x_1 + x_2 \ \tilde{\lesssim}\ 3 \qquad \boxed{P_3 = 2}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$





2

$$\mu_2 = \frac{8 - (x_1 + x_2)}{4} \geq \alpha \Rightarrow x_1 + x_2 \leq 8 - 4\alpha \quad \begin{cases} \alpha = 0 \to 8 \\ \vdots \\ \alpha = 1 \to 4 \end{cases}$$

3

$$\mu_3 = \frac{5 - (5x_1 + x_2)}{2} \geq \alpha \Rightarrow 5x_1 + x_2 \leq 5 - 2\alpha \quad \begin{cases} \alpha = 0 \to 5 \\ \vdots \\ \alpha = 1 \to 3 \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
&\max Z = 2x_1 + 3x_2 \\
&s.t.: \\
&x_1 \leq 3 \\
&x_1 + x_2 \widetilde{\leq} 4 \\
&5x_1 + x_2 \widetilde{\leq} 3 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
&\max Z = 2x_1 + 3x_2 \\
&s.t.: \\
&x_1 \leq 3 \\
&x_1 + x_2 \leq 8 - 4\alpha \\
&5x_1 + x_2 \leq 5 - 2\alpha \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

روش حل: با برش α

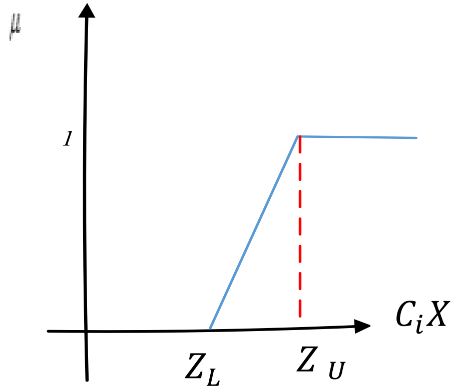
$$
\left\{
\begin{aligned}
&\alpha = 0.1 \\
&\alpha = 0.2 \\
&\quad \vdots \\
&\alpha = 1
\end{aligned}
\right.
$$

ب) برنامه ریزی منعطف **نامتقارن**

روش max-min

- $\boldsymbol{Z_L}$, $\boldsymbol{Z_U}$ $\leftarrow$ *Zimmermann*

$$\max Z = Cx$$
$$s.t:$$
$$Ax \widetilde{\leq} b$$



$\boldsymbol{Z_L}$:

$$\min Z = C_i x$$
$$s.t:$$
$$A_i x \leq b_i$$

$\boldsymbol{Z_U}$:

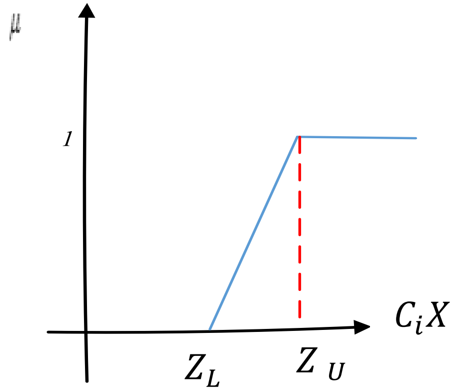
$$\max Z = C_i x$$
$$s.t:$$
$$A_i x \leq b_i$$

$$\boldsymbol{P_\circ = Z_U - Z_L}$$

ب) برنامه ریزی منعطف **نامتقارن**

روش max-min

$$\max Z = Cx$$
$s.t:$
$$Ax \lesssim b$$



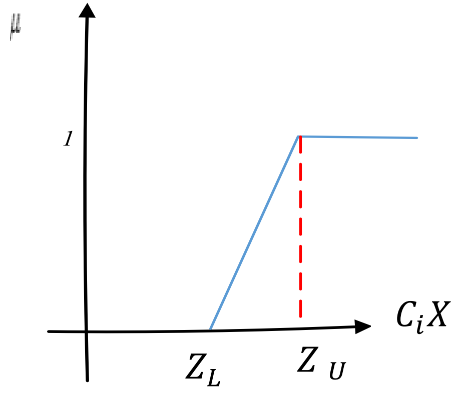
$\boldsymbol{Z_U}$:

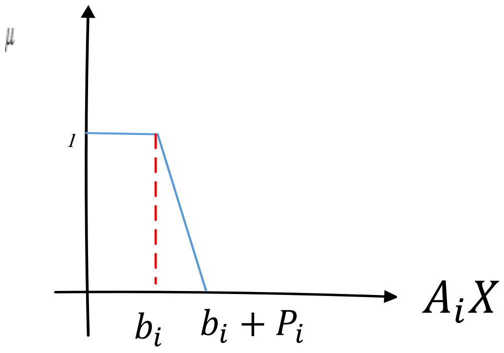
$$\max Z = C_i x$$
$s.t:$
$$A_i x \leq b_i + P_i$$

$\boldsymbol{Z_L}$:

$$\max Z = C_i x$$
$s.t:$
$$A_i x \leq b_i$$

$$\boldsymbol{P_\circ = Z_U - Z_L}$$





$$max\lambda$$

$$\lambda \leq \frac{C_iX - Z_L}{Z_U - Z_L}$$

$$\lambda \leq \frac{b_i + P_i - A_iX}{b_i + P_i - b_i}$$

$$X \geq 0$$

$$0 \leq \lambda \leq 1$$

$$\max Z = \tilde{C}x$$
$$s.t:$$
$$\tilde{A}x \leq \tilde{b}$$

Possibilistic Programming

۱. رویکرد امید ریاضی

$$\mathrm{E}(A) = \frac{\int x.\mu_{\tilde{A}}(x)dx}{\int \mu_{\tilde{A}}(x)dx}$$

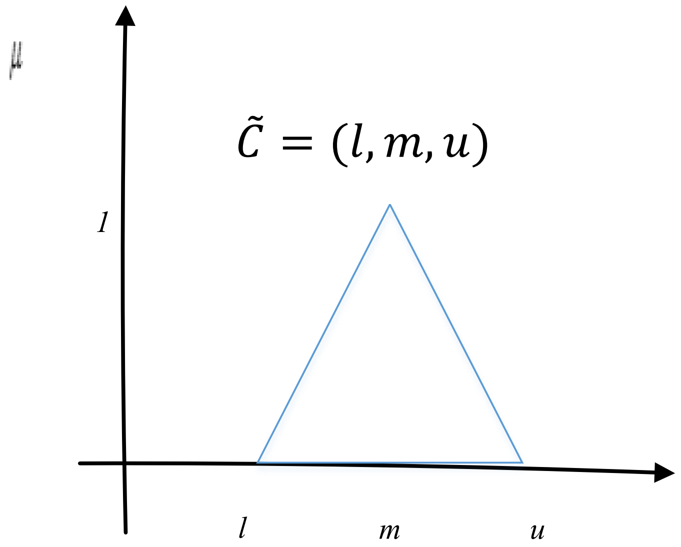
$$\bar{C} = \frac{l+m+u}{3}$$

یا

$$\bar{C} = \frac{l+2m+u}{4}$$

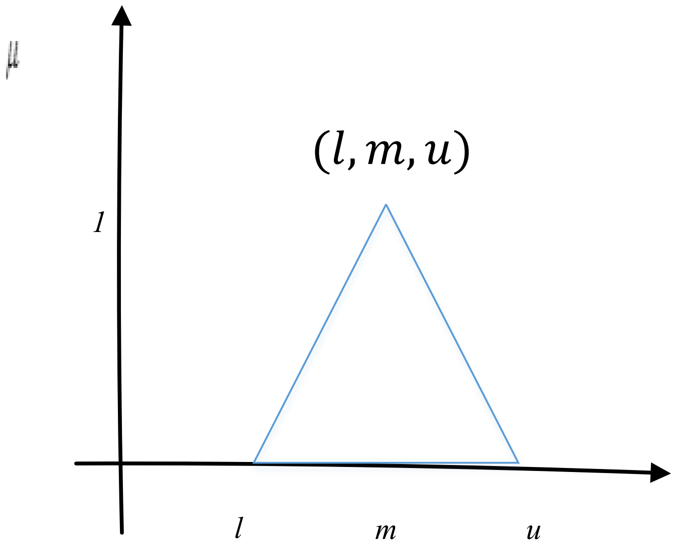
یا

$$\bar{C} = \frac{l+4m+u}{6}$$



۱. رویکرد امید ریاضی

$$\bar{C} = \frac{l+m+u}{3}$$



$$\max Z = \tilde{2}x_1 + \tilde{3}x_2$$
$$s.t.:$$
$$\tilde{4}x_1 + \tilde{6}x_2 \leq \widetilde{10}$$

$$\max Z = (1,2,3)x_1 + (1.5,3,4)x_2$$
$$s.t.:$$
$$(3,4,5)x_1+(5,6,7)x_2 \leq (8,10,11)$$

$$\max Z = 2x_1 + 2.8x_2$$
$$s.t.:$$
$$4x_1 + 6x_2 \leq 9.6$$

۲. برش α

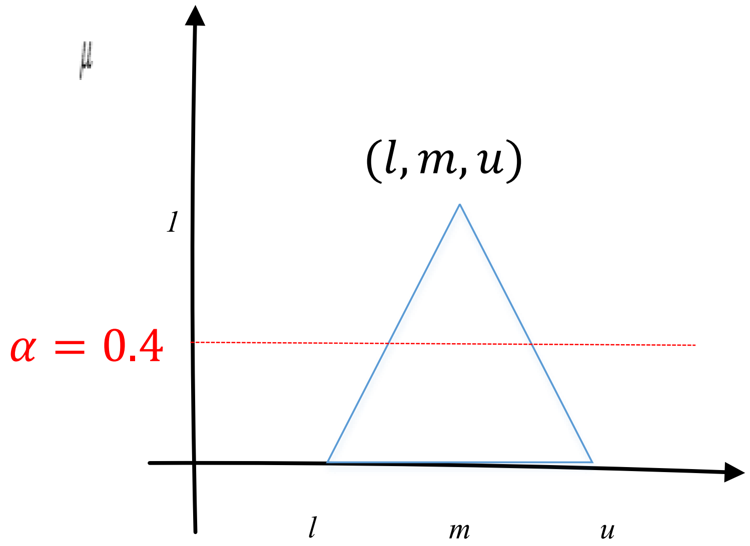
$$\max Z = 25x_1 + 18x_2$$

$s.t:$

$$\overbrace{(12,15,18)}^{a_1}x_1+\overbrace{(32,34,36)}^{a_2}x_2 \leq \overbrace{(750,800,850)}^{b_1}$$

$$(19,20,21)x_1+(7,10,13)x_2 \leq (380,430,480)$$

$$x_1, x_1 \geq 0$$



۲. برش α

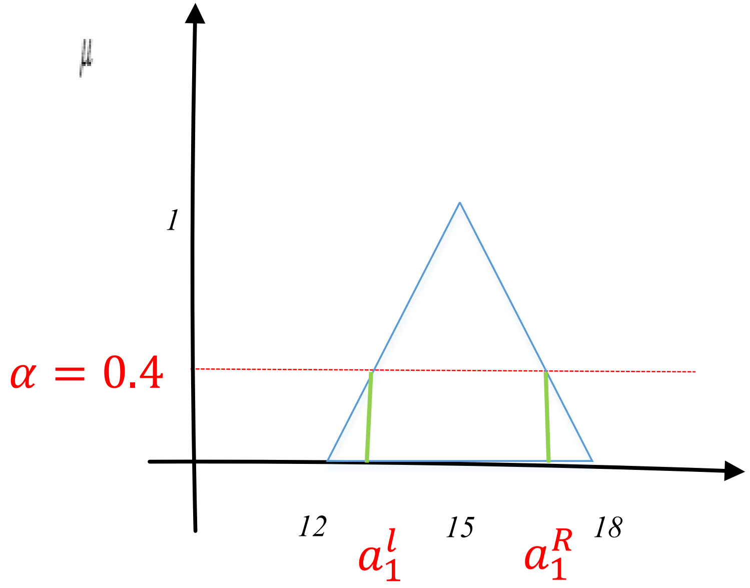
$$\max Z = 25x_1 + 18x_2$$

$s.t:$

$$(12,15,18)x_1 + (32,34,36)x_2 \leq (750,800,850)$$

$$(19,20,21)x_1 + (7,10,13)x_2 \leq (380,430,480)$$

$$x_1, x_1 \geq 0$$



$$\frac{a_1^l - 12}{15 - 12} = 0.4 \rightarrow a_1^l = 13.2$$

$$\frac{18 - a_1^R}{18 - 15} = 0.4 \rightarrow a_1^R = 16.8$$

۲. برش α

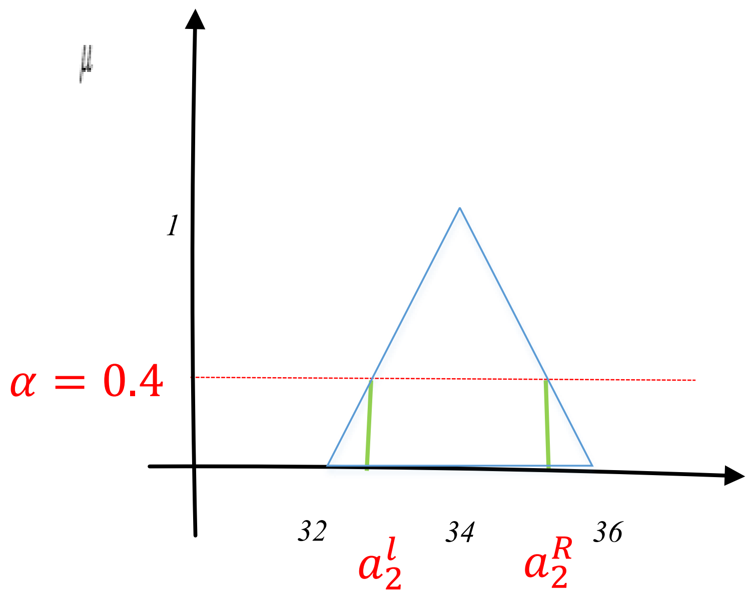
$$\max Z = 25x_1 + 18x_2$$

$s.t:$

$$(12,15,18)x_1+(32,34,36)x_2 \leq (750,800,850)$$

$$(19,20,21)x_1+(7,10,13)x_2 \leq (380,430,480)$$

$$x_1, x_1 \geq 0$$



$$\frac{a_2^l - 32}{34-32} = 0.4 \rightarrow a_2^l = 32.8$$

$$\frac{36 - a_2^R}{36-34} = 0.4 \rightarrow a_2^R = 35.2$$

۲. برش α

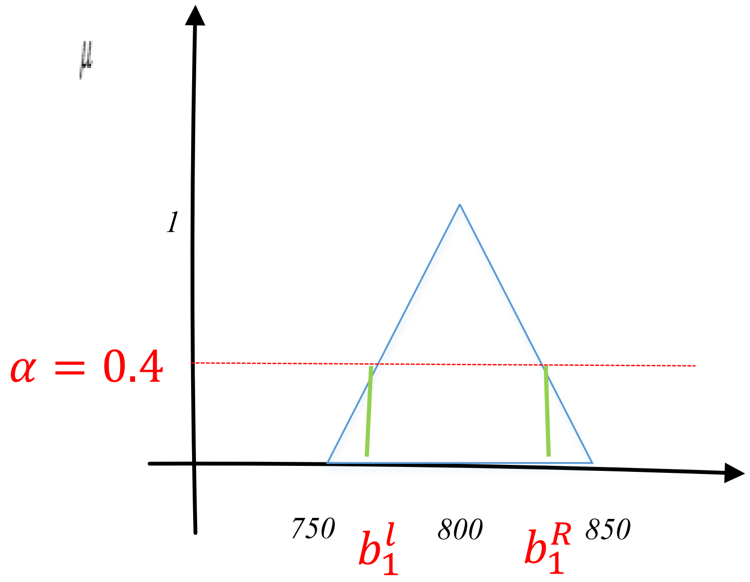
$$\max Z = 25x_1 + 18x_2$$

$s.t:$

$$(12,15,18)x_1 + (32,34,36)x_2 \leq (750,800,850)$$

$$(19,20,21)x_1 + (7,10,13)x_2 \leq (380,430,480)$$

$$x_1, x_1 \geq 0$$



$$\frac{b_1^l - 750}{800 - 750} = 0.4 \rightarrow b_1^l = 770$$

$$\frac{850 - b_1^R}{850 - 800} = 0.4 \rightarrow b_1^R = 830$$

۲. برش α

$$\max Z = 25x_1 + 18x_2$$

$s.t:$

$$(12,15,18)x_1+(32,34,36)x_2 \leq (750,800,850)$$

$$(19,20,21)x_1+(7,10,13)x_2 \leq (380,430,480)$$

$$x_1, x_1 \geq 0$$

$a_1^l = 13.2$ $\quad a_2^l = 32.8$ $\quad b_1^l = 770$

$a_1^R = 16.8$ $\quad a_2^R = 35.2$ $\quad b_1^R = 830$

1 $\quad [13.2,16.8]x_1+[32.8,35.2]x_2 \leq [770,830]$

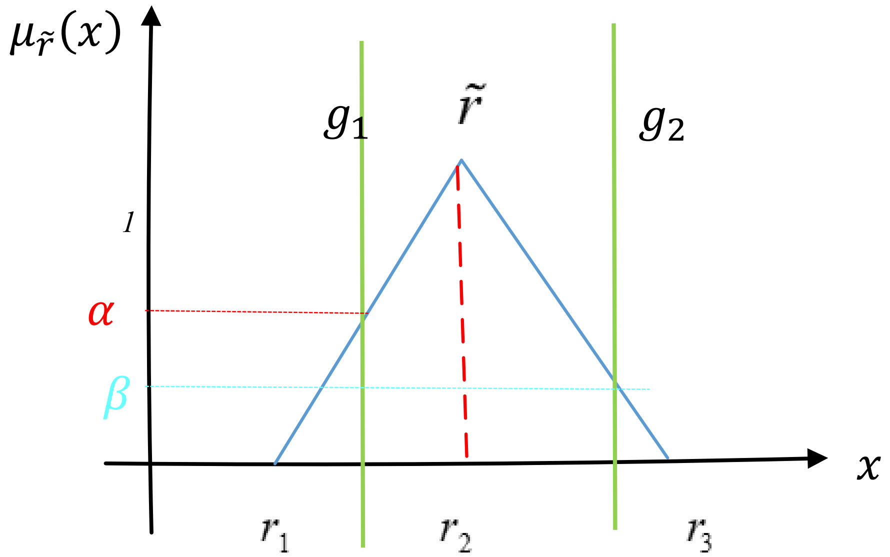
$$\max Z = 25x_1 + 18x_2$$

$s.t:$

1 $$\begin{cases} 13.2x_1 + 32.8x_2 \leq 770 \\ 16.8x_1 + 35.2x_2 \leq 830 \end{cases}$$

2 $$\begin{cases} 19.4x_1 + 8.2x_2 \leq 400 \\ 20.6x_1 + 11.8x_2 \leq 460 \end{cases}$$

$$x_1, x_1 \geq 0$$



$poss(\tilde{r} \leq g) =?$

$poss(\tilde{r} \leq g_1) = Sup(\mu_{\tilde{r}}(x)|\mathrm{x} \leq g_1) = \mu_{\tilde{r}}(g_1)=\alpha$

$poss(\tilde{r} \leq g_2) = Sup(\mu_{\tilde{r}}(x)|\mathrm{x} \leq g_2) = 1$

$Nec(\tilde{r} \leq g) =?$

$Nec(\tilde{r} \leq g_1) = 1 - Sup(\mu_{\tilde{r}}(x)|\mathrm{x} > g_1) = 1 - 1 = 0$

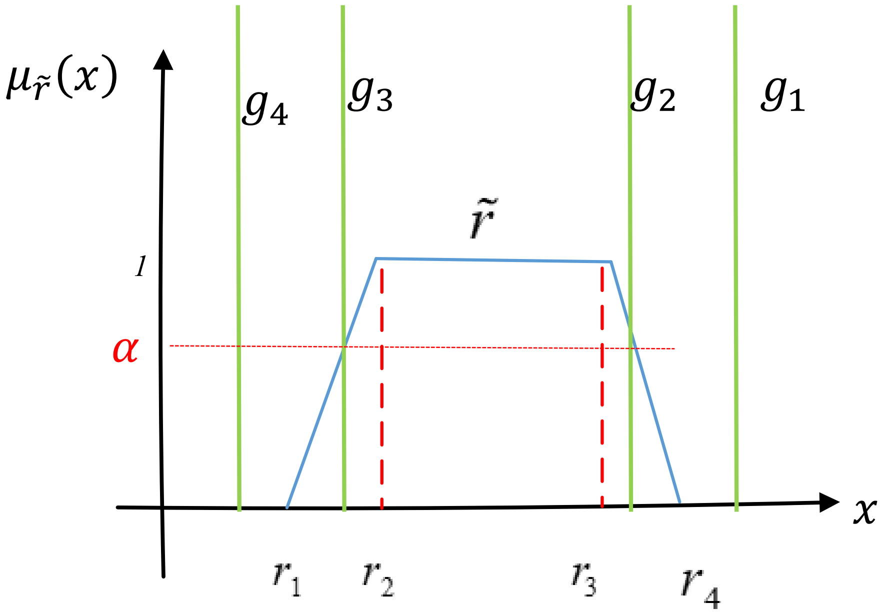
$Nec(\tilde{r} \leq g_2) = 1 - Sup(\mu_{\tilde{r}}(x)|\mathrm{x} > g_2) = 1 - \beta = 1 - poss(\tilde{r} > g_2)$

$poss(\tilde{r} \geq g_1) = 1$

$poss(\tilde{r} \geq g_2) = \beta$

$Nec(\tilde{r} \geq g_1) = 1-\alpha$

$Nec(\tilde{r} \geq g_2) = 0$



$poss(\tilde{r} \leq g) =?$

$poss(\tilde{r} \leq g_1) = 1$

$poss(\tilde{r} \leq g_2) = 1$

$poss(\tilde{r} \leq g_3) = \alpha$

$poss(\tilde{r} \leq g_4) = 0$

$Nec(\tilde{r} \leq g) =?$

$Nec(\tilde{r} \leq g_1) = 1$

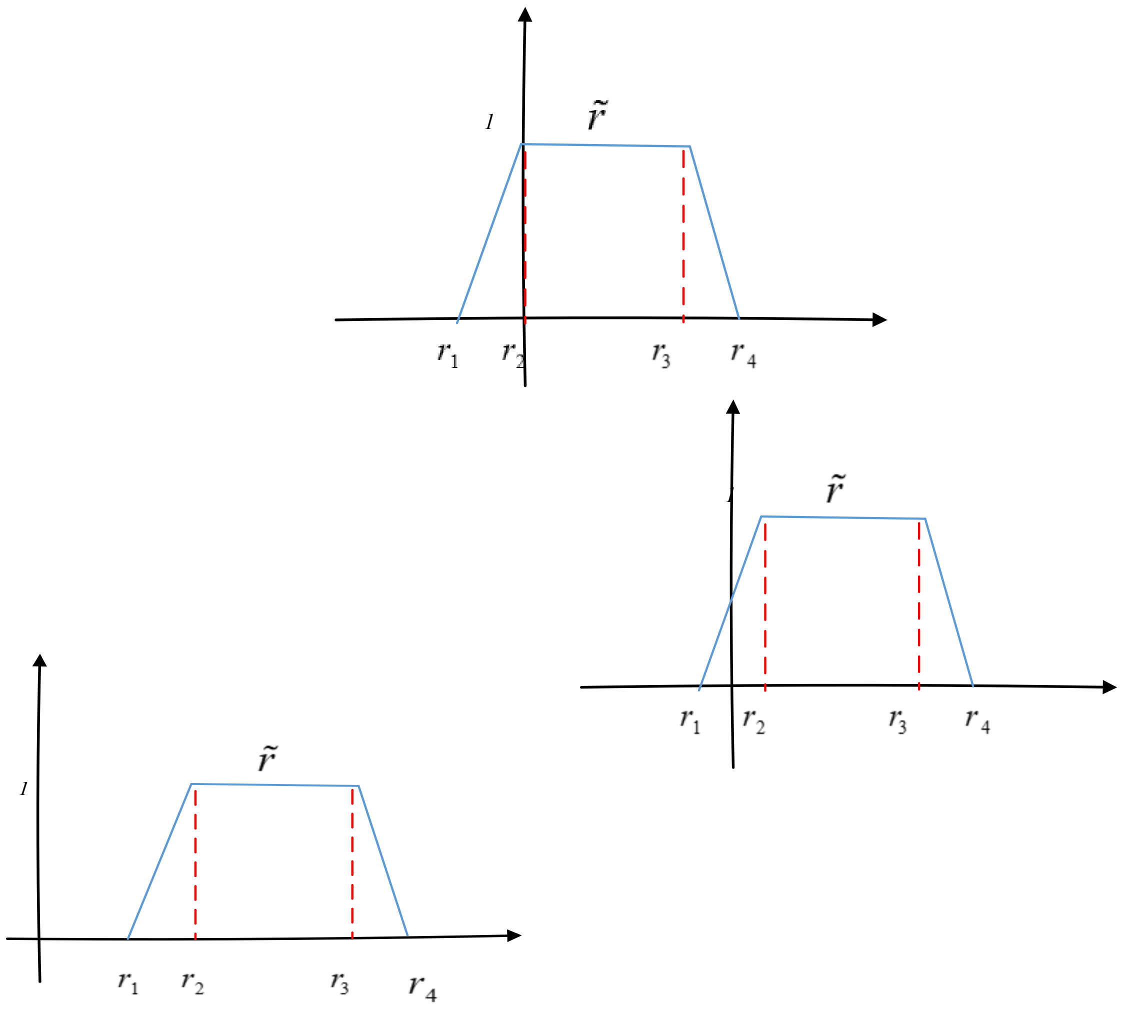
$Nec(\tilde{r} \leq g_2) = 1 - \alpha$

$Nec(\tilde{r} \leq g_3) = 0$

$Nec(\tilde{r} \leq g_4) = 0$

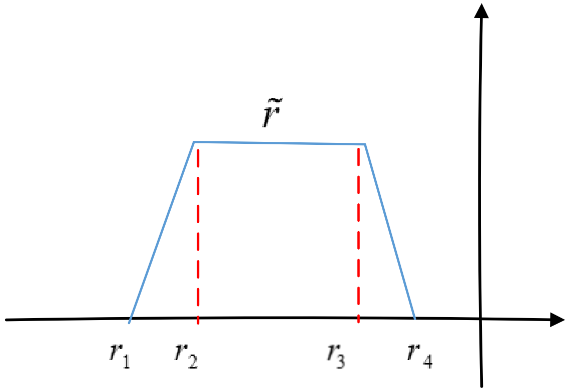
$$poss(\tilde{r} \le 0) = ?$$

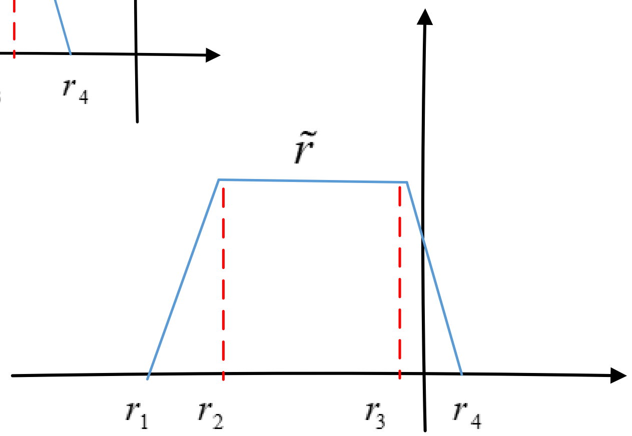
$$poss(\tilde{r} \le 0) = \begin{cases} 1 & r_2 \le 0 \\ \dfrac{0 - r_1}{r_2 - r_1} & r_1 \le 0 \le r_2 \\ 0 & r_1 \ge 0 \end{cases}$$

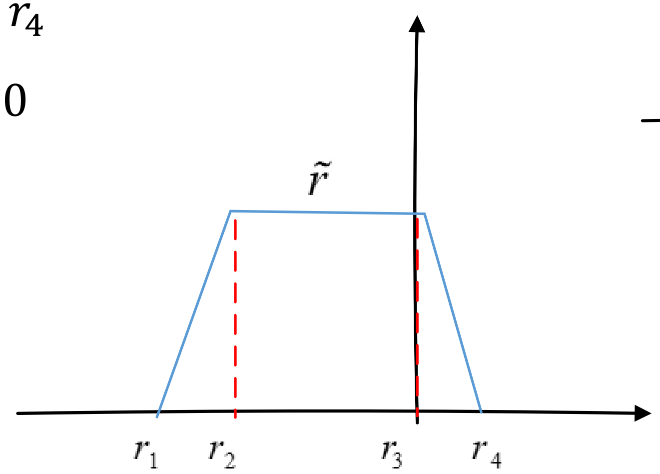


$$Nec(\tilde{r} \leq 0) = ?$$

$$Nec(\tilde{r} \leq 0) = \begin{cases} 1 & r_4 \leq 0 \\ \dfrac{0 - r_3}{r_4 - r_3} & r_3 \leq 0 \leq r_4 \\ 0 & r_3 \geq 0 \end{cases}$$







$$\max Z = Cx$$
$$s.t:$$
$$Ax \leq \tilde{b}$$

$$Nec/poss(\underbrace{AX - \tilde{b}}_{\tilde{r}} \leq 0) \geq \alpha$$

$$\Rightarrow \quad Nec/poss(\tilde{r} \leq 0) \geq \alpha$$

$$poss(\tilde{r} \leq 0) = \begin{cases} 1 & r_2 \leq 0 \\ \dfrac{0 - r_1}{r_2 - r_1} \geq \alpha & r_1 \leq 0 \leq r_2 \\ 0 & r_1 \geq 0 \end{cases} \rightarrow (1-\alpha)r_1 + \alpha r_2 \leq 0$$

$$Nec(\tilde{r} \leq 0) = \begin{cases} 1 & r_4 \leq 0 \\ \dfrac{0 - r_3}{r_4 - r_3} \geq \alpha & r_3 \leq 0 \leq r_4 \\ 0 & r_3 \geq 0 \end{cases} \rightarrow (1-\alpha)r_3 + \alpha r_4 \leq 0$$

۳. برنامه ریزی محدودیت شانس فازی (Fuzzy Chance Constraint Programming)

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } z = \tilde{f}y + \tilde{c}x \\
&\text{s.t. } Ax \geq \tilde{d}, \\
&\quad Bx = 0, \\
&\quad Sx \leq \tilde{N}y, \\
&\quad Tx \leq 1, \\
&\quad y \in \{0,1\}, x \geq 0
\end{aligned}
$$

z تابع هدف مسئله است. مقادیر $\tilde{f}$ و $\tilde{c}$ ضرایب مربوط به تابع هدف و مقادیر $\tilde{d}$ ، A، B، $\tilde{N}$، S و T ضرایب مربوط به محدودیت‌های مسئله می‌باشند. y یک متغیر باینری و x یک متغیر پیوسته است. پارامترهای $\tilde{f}$، $\tilde{c}$، $\tilde{d}$ و $\tilde{N}$ دارای عدم قطعیت فازی و مابقی پارامترها، قطعی هستند.

۳. برنامه ریزی محدودیت شانس فازی (Fuzzy Chance Constraint Programming)

$$\begin{aligned}
\text{Min } & z = \tilde{f}y + \tilde{c}x \\
\text{s.t. } & Ax \geq \tilde{d}, \\
& Bx = 0, \\
& Sx \leq \tilde{N}y, \\
& Tx \leq 1, \\
& y \in \{0,1\}, x \geq 0
\end{aligned}$$

ر برنامه‌ریزی محدودیت شانس فازی، رویکرد هدف مسئله حداقل یا حداکثرسازی میانگین (متوسط عملکرد) می‌باشد. از طرفی برای مواجهه با عدم قطعیت موجود در محدودیت‌ها از پیمانه‌های فازی مانند امکان و الزام استفاده می‌شود. به عبارتی برای هر محدودیت، امکان یا الزام ارضاء آن محدودیت درنظر گرفته می‌شود که باید حداقل سطح α را ارضاء کند

۳. برنامه ریزی محدودیت شانس فازی (Fuzzy Chance Constraint Programming)

$$
\begin{aligned}
\text{Min } & E[z] = E[\tilde{f}]y + E[\tilde{c}]x \\
\text{s.t. } & Nec\{Ax \geq \tilde{d}\} \geq \alpha, \\
& Bx = 0, \\
& Nec\{Sx \leq \tilde{N}y\} \geq \beta, \\
& Tx \leq 1, \\
& y \in \{0,1\}, x \geq 0
\end{aligned}
$$

در مدل فوق $\{0.1\} \ni \beta$ و α پارامترهای حداقل درجه الزام یا سطح اطمنیان محدودیت‌های شانس می‌باشند. Nec الزام ارضاء محدودیت شانس را نشان می‌دهد. اگر b یک عدد قطعی و r یک عدد فازی بصورت $\tilde{r} = (r_1, r_2, r_3, r_4)$ باشد، الزام برای مقادیر $b \geq \tilde{r}$ و $b \leq \tilde{r}$، بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Nec(b \geq \tilde{r}) = (1-\alpha)r_{(3)} + \alpha r_{(4)}$$

$$Nec(b \leq \tilde{r}) = (1-\alpha)r_{(2)} + \alpha r_{(1)}$$

۳. برنامه ریزی محدودیت شانس فازی (Fuzzy Chance Constraint Programming)

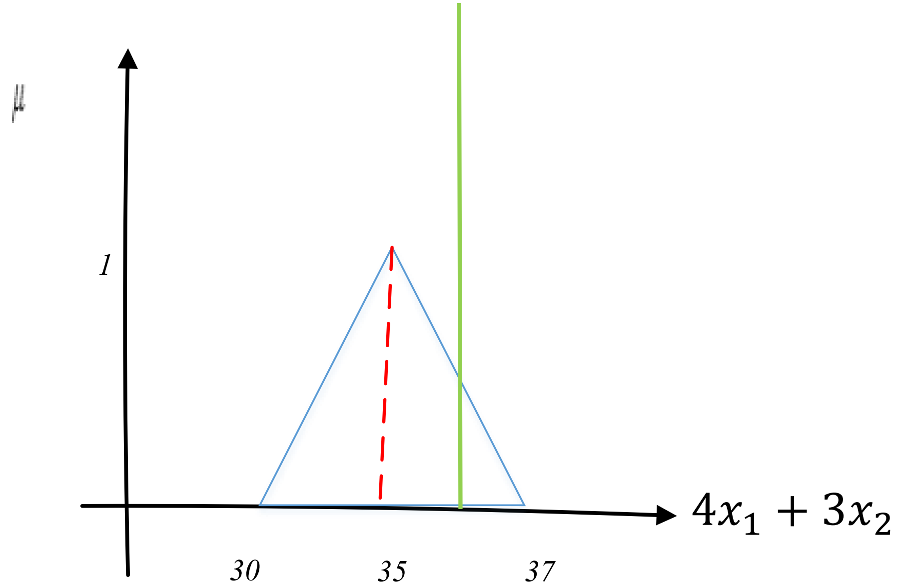
بنابراین مدل مسئله را می‌توان بصورت زیر نیز نوشت:

$$\begin{aligned}
\text{Min } & E[z] = \left(\frac{f_{(1)} + f_{(2)} + f_{(3)} + f_{(4)}}{4}\right) \mathrm{y} + \left(\frac{c_{(1)} + c_{(2)} + c_{(3)} + c_{(4)}}{4}\right) \mathrm{x} \\
\text{s.t. } & Ax \geq (1-\alpha) d_{(3)} + \alpha d_{(4)}, \\
& Bx = 0, \\
& Sx \leq [(1-\beta) N_{(2)} + \beta N_{(1)}] y, \\
& Tx \leq 1, \\
& y \in \{0,1\}, x \geq 0
\end{aligned}$$

$$\max Z = 5x_1 + 7x_2$$

$s.t:$

$$4x_1 + 3x_2 \leq (30,35,37)$$



$\alpha = 0.8$

$$poss(4x_1 + 3x_2 \leq (30,35,37)) \geq 0.8$$

$$\frac{37 - (4x_1 + 3x_2)}{37 - 35} \geq 0.8 \rightarrow 4x_1 + 3x_2 \leq 35.4$$

پایان